EJERCICIOS ÁREAS Y VOLÚMENES
(estos ejercicios se corresponden a los ejercicios 18, 19, 31, 33, 44, 52, 58 y 59 de las páginas 265, 268, 269 y 270).

1. Halla el área y el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 10 m y el de la base menor 4 m y la altura 15 m.

   El área total es la suma de las áreas de las dos bases y el área lateral. Para hallar el área lateral necesitamos la generatriz (fíjate que la fórumla $A_L = \pi(R+r)G$ se parece mucho a la fórmula del área de un trapecio). Para hallar la generatriz con la altura utilizamos el Teorema de Pitágoras, el triángulo rectángulo a utilizar tiene a la generatriz de hipotenusa y sus catetos son la altura y la diferencia entre los radios

   $$G^2 = 15^2 + 6^2 = 261 \Rightarrow G = 16,16.$$

   Así el área queda

   $$A = 10^2\pi + 4^2\pi + \pi(10+4)16,16 = (100 + 16 + 226{,}24)\pi = 1075,18 \text{ cm}^2$$

   Y el volumen

   $$V = \frac{1}{3}\left(10^2\pi + 4^2\pi + \sqrt{10^2\pi \cdot 4^2\pi}\right) \cdot 15 = \frac{1}{3}\left(364{,}42 + 125,66\right) \cdot 15 = 2450{,}39 \text{ cm}^3$$

2. Calcula la cantidad de agua que cabe en un cubo cuya altura es 12 cm sabiendo que las bases miden 20 cm y 12 cm de diámetro.

   Tenemos que calcular el volumen. Es un tronco de cono así que tenemos

   $$V = \frac{1}{3}\left(10^2\pi + 6^2\pi + \sqrt{10^2\pi \cdot 6^2\pi}\right) \cdot 20 = \frac{1}{3}\left(427,26 + 188,5\right) \cdot 20 = 4105{,}04 \text{ cm}^3$$

   Teniendo en cuenta que 1 dm^3 equivale a un litro y pasando la cantidad anterior a dm^3 (dividimos entre 1000) obtenemos que en el cubo caben aproximadamente 4,1 litros.

3. Calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 6 m y la altura de la pirámide mide 10 m.

   Primero tenemos que calcular el área de la base, que es un hexágono de lado 6 m. Como es un hexágono, el radio será también 6 m y para calcular la apotema utilizamos un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es el radio y uno de los catetos es la mitad del lado. El otro cateto es la apotema y así $a^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow a = 5,2m$.

   Con esto,
   $$V = \frac{1}{3}A_B H = \frac{1}{3}\frac{p \cdot a}{2}H = \frac{1}{3}\frac{36 \cdot 5,2}{2}10 = 312 \text{ m}^3.$$

   Para hallar el área, necesitamos el área lateral, 6 triángulos cuya base es el lado del hexágono y cuya altura hallamos con el Teorema de Pitágoras. El triángulo que utilizamos tiene de hipotenusa la altura h buscada, uno de sus catetos es la altura H=10 m de la pirámide y el otro es la apotema: $h^2 = 10^2 + 5,2^2 = 127,04 \Rightarrow h = 11,27m$

$$A = A_B + A_L = \frac{p \cdot a}{2} + 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{36 \cdot 5,2}{2} + 6 \cdot \frac{6 \cdot 11,27}{2} = 296,48 \text{ m}^2.$$

4. Calcula el área y el volumen de un cono sabiendo que su generatriz mide 13 cm y su radio 5 cm.

$$A = \pi R^2 + \pi RG = \pi R(R + G) = \pi 5(5 + 13) = 282,74 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen necesitamos la altura y la hallamos utilizando el Teorema de Pitágoras. El triángulo que necesitamos tiene a dicha altura como cateto, su hipotenusa será la generatriz y el radio el otro cateto. Así $13^2 = H^2 + 5^2$ haciendo las cuentas obtenemos que $H = 12$ y calculamos:

$$V = \frac{1}{3} A_B H = \frac{1}{3} \pi 5^2 12 = 314,16 \text{ cm}^3$$

5. Calcula la capacidad en litros de un depósito en forma de cilindro cuya altura mide 6 m y el radio de la base 3 m.

$$V = A_B H = \frac{1}{3} \pi 3^2 6 = 169,65 \text{ m}^3$$

Multiplicamos el dato anterior por 1000 para pasar a dm^3 (que se corresponden con litros) y obtenemos que en el depósito caben 169650 litros.

6. Calcula el área lateral del cono que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm.

Si hacemos Pitágoras con ese triángulo, obtenemos que la hipotenusa mide 13 cm. Dicha hipotenusa será la generatriz del cono. El área lateral será

$$A = \pi RG = \pi 12 \cdot 5 = 188,5 \text{ cm}^2$$

7. Un bote de refresco con forma de cilindro contiene 33 cl. Calcula el radio de la base sabiendo que su altura es de 11 cm.

Como 1 dm^3 equivale a un litro y 33 cl son 0,33 litros, el bote tiene una capacidad de 0,33 $\text{dm}^3 = 330cm^3$. Además sabemos que el volumen es el producto del área de la base por la altura:

$$V = A_B H \Rightarrow 330 = \pi R^2 11 \Rightarrow R^2 = \frac{330}{11\pi} = 9,55 \Rightarrow R = 3,1cm.$$

8. El envase de un yogur es un cilindro en el que el diámetro de la base mide 5 cm y la altura 6 cm. Calcula la superficie de la etiqueta que rodea completamente la superficie lateral del envase.

Tenemos que hallar el área lateral de un cilindro:

$$A = 2\pi RH = 2\pi 5 \cdot 6 = 188,5 \text{ cm}^2.$$