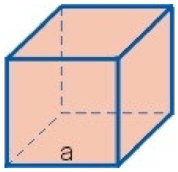
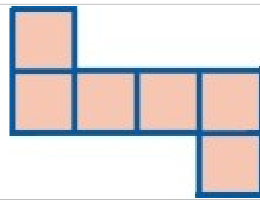
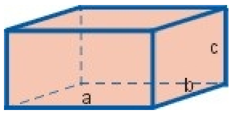
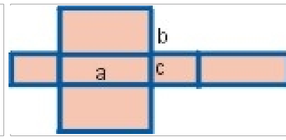
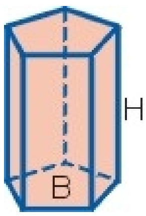
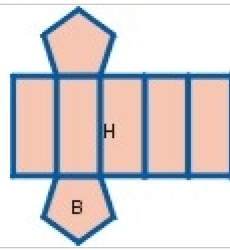
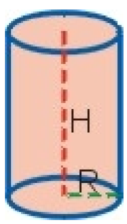
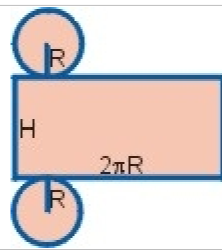
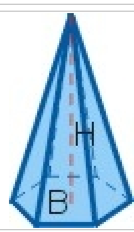
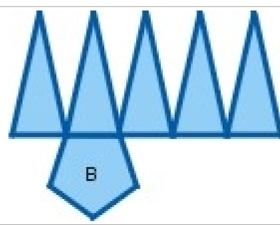
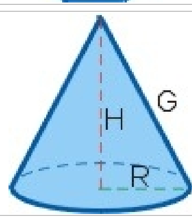
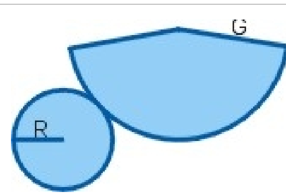
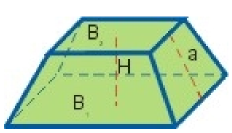
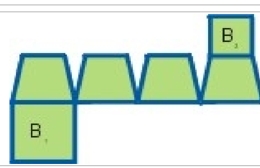
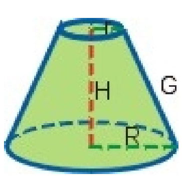
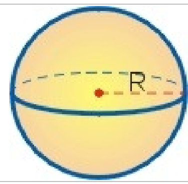
Cuerpos Geométricos

Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Cubo o Hexaedro			$A = 6a^2$	$V = 6a^3$
Paralelepípedo u ortoedro			$A = 2(ab+ac+bc)$	$V = abc$
Prisma			$A_T = 2A_B + A_L$	$V = A_B H$
Cilindro			$A_T = 2A_B + A_L$ $A_B = \pi R^2$ $A_L = 2\pi RH$	
Pirámide			$A_T = A_B + A_L$	$V = \frac{1}{3} A_B H$
Cono			$A_T = A_B + A_L$ $A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi RG$	
Tronco de pirámide			$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$	$V = \frac{1}{3}(A_{B1} + A_{B2} + \sqrt{A_{B1} \cdot A_{B2}} \cdot H)$
Tronco de cono			$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$ $A_{B1} = \pi R^2$ $A_{B2} = \pi r^2$ $A_L = \pi(R + r)G$	

esfera			$A = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

ÁREA Y VOLUMEN DE LOS POLIEDROS REGULARES

ÁREA DE LOS POLIEDROS REGULARES

El área total de un poliedro se determina calculando el área de una cara y multiplicando por el número de caras.

VOLUMEN DE LOS POLIEDROS REGULARES

Todos los vértices de un poliedro regular equidistan de un punto interior llamado **centro**. Haciendo pasar planos por este punto y por todas las aristas, el poliedro queda descompuesto en tantas pirámides iguales como caras tiene. Para calcular el volumen de un poliedro será suficiente calcular el volumen de una de estas pirámides y multiplicar por el número de caras del poliedro.

El volumen de una pirámide es $\frac{1}{3} \cdot B \cdot ap$, siendo B el área de la base y "ap" la distancia del centro del poliedro al centro de la cara, distancia que se llama **apotema**. Siendo N el número de caras $V = \frac{1}{3} \cdot N \cdot B \cdot ap$, pero $N \cdot B = S$ (área total del poliedro), y en consecuencia $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot ap$.

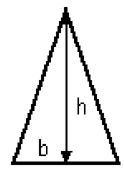
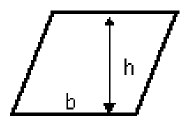
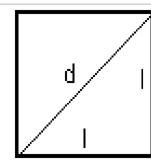
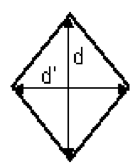
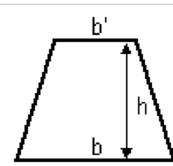
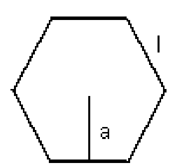
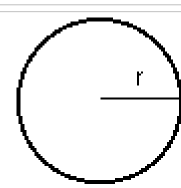
El volumen de un poliedro regular es la tercera parte del producto de su área por la apotema.

Nombre	Área de una cara	Área total	Apotema	Volumen
Tetraedro	$\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$	$a^2 \cdot \sqrt{3}$	$\frac{a}{12} \cdot \sqrt{6}$	$\frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$
Octaedro	$\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$	$2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$	$\frac{a}{6} \cdot \sqrt{6}$	$\frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2}$

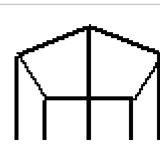
Icosaedro	$\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$	$5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$	$\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{7+3 \cdot \sqrt{5}}{6}}$	$\frac{5 \cdot a^3}{6} \cdot \sqrt{\frac{7+3 \cdot \sqrt{5}}{2}}$
Hexaedro	a^2	$6 \cdot a^2$	$\frac{a}{2}$	a^3
Dodecaedro	$\frac{5}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{5+2 \cdot \sqrt{5}}{5}}$	$15 \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{5+2 \cdot \sqrt{5}}{5}}$	$\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{25+11 \cdot \sqrt{5}}{10}}$	$\frac{5 \cdot a^3}{2} \cdot \sqrt{\frac{47+21 \cdot \sqrt{5}}{10}}$

CUADRO DE AREAS Y VOLUMENES

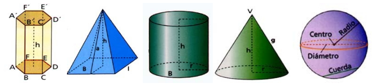
AREAS

NOMBRE	DEFINICION	FIGURA	TERMINOS	FORMULA
Triángulo	Es la porción de plano limitada por tres segmentos de recta.		h=altura b=base	$A = \frac{b.h}{2}$
Paralelogramo	Son los cuadriláteros que tienen sus lados opuestos iguales y paralelos.		h=altura b=base	A=b.h
Cuadrado	Cuadrilátero de cuatro lados y 4 ángulos iguales.		l=lado d=diagonal	$A = l^2$ $A = \frac{d^2}{2}$
Rombo	Cuadrilátero cuyas dos diagonales se cruzan en ángulo de 90º		d=diagonal mayor d'=diagonal menor	$A = \frac{d.d'}{2}$
Trapecio	Cuadrilátero que tiene dos de sus lados paralelos y los otros dos no.		b=base mayor b'=base menor h=altura	$A = \frac{h}{2}(b+b')$ $A = h(\frac{b+b'}{2})$
Polígono regular	Es la porción de plano limitada por segmentos de recta, es regular si todos sus lados y ángulos son iguales.		a=apotema l=lado n=número de lados	$A = \frac{a.l.n}{2}$
Círculo	Es la porción de plano limitada por la circunferencia.		r=radio	$A=p.r^2$

VOLUMENES

NOMBRE	DEFINICION	FIGURA	TERMINOS	FORMULA
Prisma	Cuerpo geométrico cuyas bases son dos poligonos iguales y paralelos y sus caras		B=área de la base h=altura	V=h.B

Cuerpos Geométricos



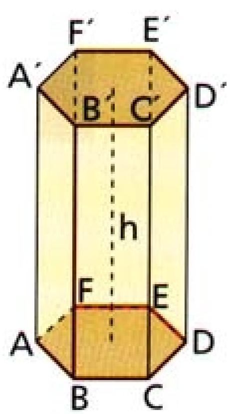
ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

En esta página podremos ver, si pulsamos en los iconos correspondientes que tenemos arriba, las áreas y volúmenes de los Cuerpos Geométricos siguientes:

- **Prisma regular**
- **Pirámide regular**
- **Cilindro regular**
- **Cono regular**
- **Esfera**
- **Problemas**

Para ir a las Figuras Planas, tenemos que pulsar el icono de la izquierda; y para ir al indice, pulsaremos el icono de la derecha. Para hacer problemas pulsaremos el icono de la interrogación

PRISMA



El prisma regular es un cuerpo geométrico limitado por 2 polígonos regulares, llamados bases, y por tantos rectángulos como lados tenga la base.

Se nombran diciendo PRISMA y el nombre del polígono de la base. (Ejemplo: Prisma pentagonal).

Ponga aquí el ratón y podrá ver el desarrollo de un prisma.

Podemos hallar el área lateral , área total y volumen de este cuerpo geométrico, utilizando las siguientes formulas:

ÁREA LATERAL

$AL = P \cdot h$

(Es decir, es área lateral es igual al perímetro del polígono de la base multiplicado por la altura (h) del prisma)

ÁREA TOTAL

AT = AL + 2 · Ab

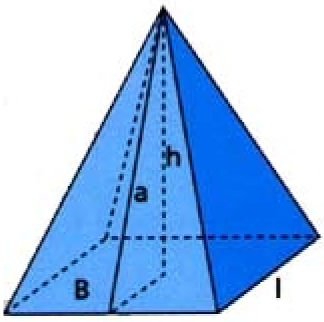
(Es decir, el área total es igual al área lateral mas el área de los polígonos de las 2 bases)

VOLUMEN

V = Ab · h

(Es decir, el volumen es igual al área del polígono de la base multiplicado por la altura (h) del prisma)

PIRÁMIDE



La pirámide regular es un cuerpo geométrico limitado por un polígono regular, llamado base, y por tantos triángulos como lados tenga la base.

Se nombran diciendo PIRÁMIDE y el nombre del polígono de la base. (Ejemplo: Pirámide cuadrangular).

Para ver el desarrollo de una pirámide ponga el raton aquí

Podemos hallar el área lateral , área total y volumen de este cuerpo geométrico, utilizando las siguientes formulas:

ÁREA LATERAL

AL = P · a / 2

(Es decir, es área lateral es igual al perímetro del polígono de la base multiplicado por la altura de una cara lateral (a) de la pirámide y dividido entre 2)

ÁREA TOTAL

AT = AL + Ab

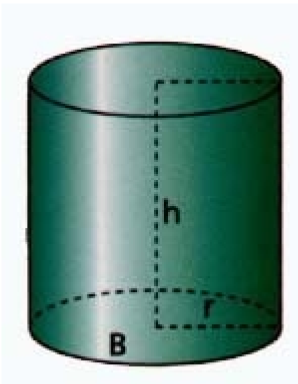
(Es decir, el área total es igual al área lateral mas el área del polígonos de la base)

VOLUMEN

V = Ab · h / 3

(Es decir, el volumen es igual al área del polígono de la base multiplicado por la altura (h) de la pirámide y dividido entre 3)

CILINDRO



El cilindro es el cuerpo geométrico engendrado por un rectángulo al girar en torno a uno de sus lados. Ver revolución del Cilindro

Ponga aquí el ratón y podrá ver el desarrollo del cilindro

Podemos hallar el área lateral , área total y volumen de este cuerpo geométrico, utilizando las siguientes formulas:

ÁREA LATERAL

AL = 2 · π · r · g

(Es decir, es área lateral es igual a 2 multiplicado por π (pi), el resultado multiplicado por el radio de la base (B) y multiplicado por la generatriz (g) del cilindro)

ÁREA TOTAL

AT = AL + 2 · Ab

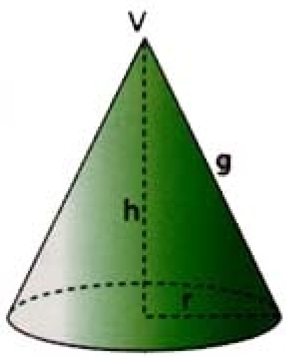
(Es decir, el área total es igual al área lateral mas las áreas de los dos círculos de las bases)

VOLUMEN

V = Ab · h

(Es decir, el volumen es igual al área del círculo de la base multiplicado por la altura (h) del cilindro)

CONO



El cono es un cuerpo geométrico engendrado por un triángulo rectángulo al girar en torno a uno de sus catetos. Ver revolución cono

Ponga aquí el ratón y podrá ver el desarrollo del cono

Podemos hallar el área lateral , área total y volumen de este cuerpo geométrico, utilizando las siguientes formulas:

ÁREA LATERAL

AL = π · r · g

(Es decir, es área lateral es igual a π (pi)multiplicado por el radio (r) de la base y multiplicado por la generatriz (g) del cono)

ÁREA TOTAL

AT = AL + Ab

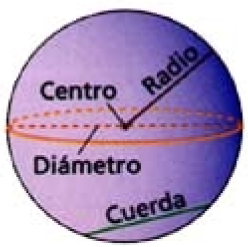
(Es decir, el área total es igual al área lateral mas el área del circulo de la base)

VOLUMEN

V = Ab · h/ 3

(Es decir, el volumen es igual al área del circulo de la base multiplicado por la altura (h) del cono y dividido entre 3)

ESFERA



La esfera es un cuerpo geométrico engendrado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

Podemos hallar el área y el volumen de este cuerpo geométrico, utilizando las siguientes formulas:

ÁREA

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

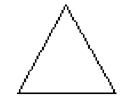
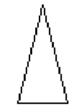
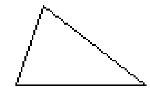
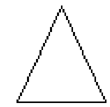
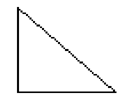
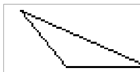
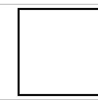
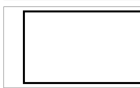
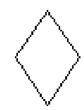
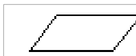
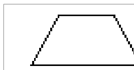
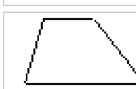
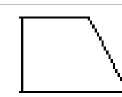
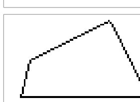
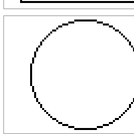
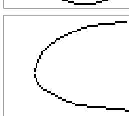
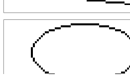
(Es decir, es área es igual a 4 multiplicado por π (pi), y el resultado se multiplica por el cuadrado del radio de la esfera)

VOLUMEN

$$V = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$$

(Es decir, el volumen es igual a 4 multiplicado por π (pi), el resultado se multiplica por el cubo del radio de la esfera y lo que resulta se divide entre 3)

Clasificación de las figuras y cuerpos geométricos

Figuras geometrícas	**Polígonos** Nombre según los lados 3-Triángulo 4-Cuadrilátero 5-Pentágono 6-Hexágono 7-Heptágono 8-Octógono 9-Eneágono 10-Decágono 11-Endecágono 12-Dodecágono 13-Tridecágono 14-Tetradecágono 15-Pentadecágono De más lados se nombran como poligonos de n lados Se denominan poligonos regulares si tienen todos los ángulos y lados iguales.	Triángulos	Según los lados	Equilátero	
				Isósceles	
				Escaleno	
			Según los ángulos	Acutángulo	
				Rectángulo	
				Obtusángulo	
		Cuadriláteros	Paralelogramo	Cuadrado	
				Rectángulo	
				Rombo	
				Romboide	
			Trapecio	isósceles	
				escaleno	
				rectángulo	
			Trapezoide		
	Cónicas	Circunferencia			
		Parábola			
		Elipse			

POLIEDROS REGULARES

DEFINICIÓN

Poliedro regular es aquel cuyas caras son todas polígonos regulares iguales, y todos sus diedros y ángulos poliedros también iguales.

Para que estas condiciones se cumplan, el poliedro tiene que ser convexo, puesto que en los cóncavos los ángulos diedros no son todos iguales.

TEOREMA DE EULER

En todo poliedro convexo, el número de caras más el de vértices, es igual al de aristas más dos.

$$C + V = A + 2$$

TEOREMA

No existen más que cinco poliedros convexos regulares.

Los cinco poliedros regulares convexos se llaman:

NOMBRE	CARA	Nº DE CARAS	Nº DE VÉRTICES	Nº DE ARISTAS
Tetraedro	Triángulo	4	4	6
Octaedro	Triángulo	8	6	12
Icosaedro	Triángulo	20	12	30
Cubo - Hexaedro	Cuadrado	6	8	12
Dodecaedro	Pentágono	12	20	30

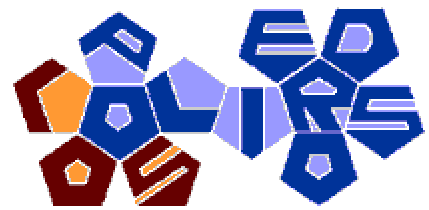
POLIEDROS CONJUGADOS

Se llaman **poliedros conjugados** aquellos en que el número de caras de uno es igual al número de vértices de otro y viceversa. Según el teorema de Euler deben tener, el mismo número de aristas.

Observando el cuadro anterior son conjugados:

Octaedro	Hexaedro
Icosaedro	Dodecaedro
Tetraedro	Tetraedro

Los centros de las caras de un poliedro regular son los vértices de un poliedro conjugado al primero.



- **Descripción, tipos y características**

Los poliedros son **sólidos cuyas caras son polígonos regulares**.

En los poliedros distinguimos:

- **Vértices**: puntos donde concurren tres aristas
- **Aristas**: lados de los polígonos regulares
- **Caras**: polígonos regulares

Además podemos fijarnos en:

- **Ángulos planos**: cuyos lados son dos aristas convergentes
- **Ángulos diédricos**: cuyas caras son dos polígonos adyacentes
- **Ángulos triédricos**: formados por tres caras convergentes en un vértice

En un vértice pueden concurrir *m* polígonos regulares de *n* lados unidos vértice a vértice. La suma de los ángulos de cada uno de estos polígonos no debe ser mayor de 360º, pues de lo contrario no formarían un “ángulo sólido”.

Por tanto debe considerarse que: $\frac{m(n-2)180^\circ}{n} < 360^\circ$

Los más sencillos son aquellos que se forman a partir de un solo polígono regular. Este grupo de poliedros ya era conocido por Euclides (330 a.C.) y estos cinco sólidos estuvieron acompañados de cierto misticismo. Se asociaban con los cuatro elementos supuestos y con el Universo y reciben el nombre de **sólidos platónicos**. Los únicos poliedros regulares son:

1. El **TETRAEDRO**: Formado por tres triángulos equiláteros. Es el que tiene menor volumen de los cinco en comparación con su superficie. Representa el fuego. Está formado por 4 caras, 6 aristas y 4 vértices
2. El **CUBO**: Formado por seis cuadrados. Permanece estable sobre su base. Por eso representa la tierra. Está formado por 6 caras, 12 aristas y 8 vértices.
3. El **OCTAEDRO**: Formado por ocho triángulos equiláteros. Gira libremente cuando se sujeta por vértices opuestos. Por ello, representa al aire en movimiento. Está formado por 8 caras, 12 aristas y 6 vértices.
4. El **DODECAEDRO**: Formado por doce pentágonos regulares. Corresponde al Universo, pues sus doce caras pueden albergar los doce signos del Zodiaco. Tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices.
5. El **ICOSAEDRO**: Formado por veinte triángulos equiláteros. Es el tiene mayor volumen en relación con su superficie y representa al agua. Tiene 20 caras, 30 aristas y 12 vértices.

En todos ellos se cumple la relación: CARAS + VÉRTICES – ARISTAS = 2

También pueden construirse poliedros con más de un tipo de polígono regular. Reciben el nombre de **sólidos arquimedianos.** Existe un número infinito de ellos, pues incluye a dos grupos:

- Los **PRISMAS REGULARES**, cuyas caras laterales son cuadrados y sus bases, iguales y paralelas, son dos polígonos regulares.
- Los llamados **ANTIPRISMAS**, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y sus bases, también dos polígonos regulares paralelos, pero están girados, de forma que cada vértice de una se proyecta al punto medio de cada lado de la otra.
- Los **POLIEDROS ESTRELLADOS** JohannKepler (1571-1630) estudió los poliedros estrellados, obtenidos a partir del pentagrama de los pitagóricos. La diferencia principal de estos poliedros estrellados con el resto es que son cóncavos. Hay cuatro, dos de puntas estrelladas con pirámides pentagonales y otros dos de puntas estrelladas con pirámides triangulares. Kepler los llamó gran y pequeño dodecaedro estrellado (de 12 puntas) y gran y pequeño icosaedro estrellado (de 20 puntas).

- El resto son trece sólidos diferentes:
  - El **TETRAEDRO TRUNCADO**: 4 hexágonos regulares y 3 triángulos equiláteros
  - El **CUBO TRUNCADO**: 6 octógonos regulares y 8 triángulos equiláteros
  - El **CUBOCTAEDRO**: 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros
  - El **ROMBICUBOCTAEDRO MENOR**: 18 cuadrados y 8 triángulos equiláteros
  - El **OCTAEDRO TRUNCADO**: 8 hexágonos regulares y 6 cuadrados
  - El **CUBO REDONDEADO**: 6 cuadrado y 32 triángulos equiláteros
  - El **ROMBICUBOCTAEDRO MAYOR**: 4 octógonos regulares, 10 hexágonos regulares y 12 cuadrados

- El **ICOSIDODECAEDRO**: 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros
- El **DODECAEDRO TRUNCADO**: 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros
- El **ICOSAEDRO TRUNCADO**: 20 hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares
- El **ROMBICOSIDODECAEDRO MENOR**: 12 pentágonos regulares, 30 cuadrado y 20 triángulos equiláteros
- El **DODECAEDRO REDONDEADO**: 12 pentágonos regulares y 80 triángulos
- El **ROMBICOSIDODECAEDRO MAYOR**: 12 decágonos regulares, 20 hexágonos regulares y 30 cuadrados

Volver a POLIEDROS   Ir al Al Directorio

EL MATEMÁTICO DEL MES (SEPTIEMBRE)

EULER

SU HISTORIA

(Basilea 1707-San Petersburgo 1783) Matemático suizo. A los veinte años consiguió el primero de los 12 premios que, con el tiempo, había de concederle la Academia francesa y, por invitación de Catalina I de Rusia, se incorporó a la Academia de San Petersburgo merced a la gestión de los Bernoulli, instalados allí desde 1725. En 1733 sucedió a Daniel Bernoulli al frente de la sección de matemáticas de dicha Academia.

En 1741, invitado por Federico II el Grande, se trasladó a la Academia de Berlín, al frente de la cual sucedió a Maupertuis, en 1756, como presidente en funciones. En 1766 aceptó una oferta de Catalina la Grande para reincorporarse a San Petersburgo. Ese mismo año quedó ciego a causa de una afección de cataratas, tras haber perdido ya la visión del ojo derecho en 1735.

El primer logro científico importante de Euler lo constituyó la introducción (1736) del método analítico en la exposición de la mecánica newtoniana con el fin de reducir al mínimo la tradicional confianza en la demostración por métodos geométricos. De la mecánica, Euler trasladó estos planteamientos al cálculo infinitesimal, y en 1748 publicó la primera obra de análisis matemático en la que el papel principal estaba reservado a las funciones en lugar de a las curvas. La geometría fue, con todo, un campo en el que Euler realizó las contribuciones mayores, siendo uno de sus resultados más conocidos la fórmula que relaciona el número de caras, vértices y aristas de un poliedro regular, en el que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos ($C + V = A + 2$). Sus obras completas, que abarcan más de ochocientos tratados, ocupan 87 volúmenes.

FÓRMULA DE EULER

Una superficie poliédrica está formada por polígonos planos, de manera tal que cada arista es a la vez arista del polígono adyacente (y de uno sólo). Un poliedro es convexo si toda la figura queda a un lado de un plano cualquiera de sus caras. La fórmula de Euler establece que, en un poliedro convexo, el número de caras más el números de vértices es igual al número de aristas más dos. Llamando C al número de caras, V al de vértices y A al de aristas se tiene que:

$$C + V = A + 2$$

Las consecuencias más importantes del teorema de Euler son:

1) No puede existir un poliedro convexo con menos de seis aristas, cuatro caras y cuatro vértices

2) Sólo existen cinco poliedros convexos cuyas caras sean polígonos de igual número de lados y cuyos ángulos poliedros tengan entre si el mismo número de aristas y que son; tetraedro, octaedro, icosaedro, hexaedro y dodecaedro

3) La suma de todas las caras de un poliedro convexo es igual a tantas veces cuatro rectos como el número de vértices que tiene menos dos.

EJERCICIOS

1) Hallar el Área Lateral de un prisma cuadrangular que tiene de lado de la base 6 cm y de altura del prisma 8 cm.

2) Hallar el Área Total de un prisma cuadrangular que tiene de lado de la base 3 cm y de altura del prisma 5 cm.

3) Hallar el Volumen de una pirámide cuadrangular que tiene de lado de la base 8 cm y de altura de la piramide 6 cm

4) Hallar el Volumen de un Prisma cuadrangular que tiene de lado de la base 3 cm y de altura del prisma 5 cm.

5) Hallar el Área Lateral de una pirámide pentagonal que tiene de lado de la base 6 cm y de altura lateral de la piramide 9 cm.

6) Hallar el Área Lateral de un cilindro que tiene de radio de la base 10 cm y de generatriz 5 cm.

7) Hallar el Volumen de un cilindro que tiene de radio de la base 5 cm y de altura 10 cm.

8) Hallar el Área Lateral de un cono que tiene de radio de la base 15 cm y de generatriz 10 cm.

9) Hallar el Volumen de un cono que tiene de radio de la base 6 cm y de altura 10 cm.

10) Hallar el Área de una Esfera tiene de radio de la base 10 cm

Contesta a estas preguntas

El perímetro de un polígono es..
La suma de todos los ángulos
180º
La suma de todos sus lados
Lo que vale un lado

La unidad de volumen es...
El metro cúbico
El metro cuadrado
El gramo
El centímetro cuadrado

¿Cuánto vale "pi"?
6,28
10
12,56
3,14

¿Que es un triángulo obtusángulo?
El que tiene 4 ángulos
El que tiene un ángulo obtuso.
El que tiene un ángulo agudo
El que mide mas de 80º

¿Que es el volumen?
Las losas que caben en una habitación
La capacidad que tiene un cuerpo geométrico
La capacidad que tiene una figura geométrica
El metro cúbico