LOS NÚMEROS Y LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Dr. Oscar José Bressan

Contenido

Matemática - Aritmética

La palabra matemáticas viene del griego:

μ'αθημα (*máthema*) = ciencia, conocimiento o aprendizaje

μαθηματικ'οζ (*mathematikós*) = cariño por conocer

Aritmética también viene del griego,

'αριθμ'ητικοζ *(árithmétikos)* de

αριθμ'οζ *(arithmós)* = número y

τ'εχνη *(téchne)* = arte o habilidad.

Podríamos definirla como el arte de contar. Es la más vieja y simple de todas las ramas de las matemáticas, y estudia las propiedades elementales de ciertas operaciones sobre los números. Es usada a diario por todo el mundo, tanto en las actividades más elementales como en las ciencias más sofisticadas y complejas.

La primera "operación" con números no es sumar. La primera operación es contar, que ni siquiera es exclusiva de los seres humanos. Hay experimentos que prueban que muchos animales cuentan. Usando la operación contar como única herramienta uno podría llegar a realizar las siete operaciones elementales cuando sólo involucren números naturales. Veamos un ejemplo elaborado por Richard Phillips FEYNMANN (norteamericano, 1918-1988), premio Nobel en Física. Supongamos que estamos hablando a un grupo de gente que sabe contar, pero no sabe sumar ni restar y queremos darles una idea de cómo se hace una resta. Como ejemplo tenemos el número 584 y queremos restarle el número 236. Hacemos esta operación contando primero 584 porotos que vamos poniendo en una olla. Después sacamos, uno a uno 236 porotos. Finalmente contamos los porotos que quedan en la olla (348) y éste es el resultado de la resta. El método es eficaz, ya que se logra el resultado propuesto, pero es altamente ineficiente. El algoritmo de la sustracción es muchísimo más eficiente, pero lleva bastante tiempo llegar a entenderlo, aprenderlo y, además, aceptarlo como el resultado correcto de la sustracción.

Para hablar de aritmética no es necesario definir un sistema privilegiado de numeración ni de notación. Pero debe advertirse que algunos sistemas son más convenientes que otros. Los números romanos (sistema aditivo) son especialmente tediosos para cualquier tipo de operación. Los arábigos (sistema posicional), en cambio, son mucho más dinámicos y se han adoptado universalmente. De haberse adoptado más temprano muy posiblemente se habrían logrado desarrollos matemáticos (y consecuentemente en el resto de las ciencias naturales) mucho antes de lo que históricamente ocurrió. Los números arábigos fueron desarrollados por un matemático indo, cuyo nombre se perdió, y adoptados luego por los árabes.

Primeros tiempos

La prehistoria de la aritmética cuenta con muy pocos elementos. El más importante de ellos es quizás el conocido como **hueso de Ishango** (fig. 1), encontrado a las orillas del Nilo (África), y que fue hecho alrededor de 18000 a 20000 años antes de Cristo.

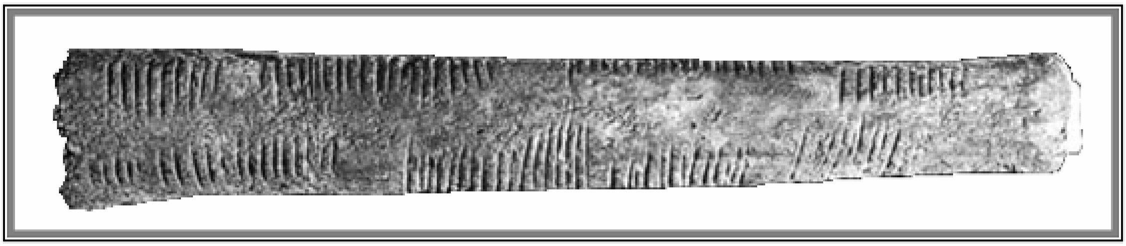
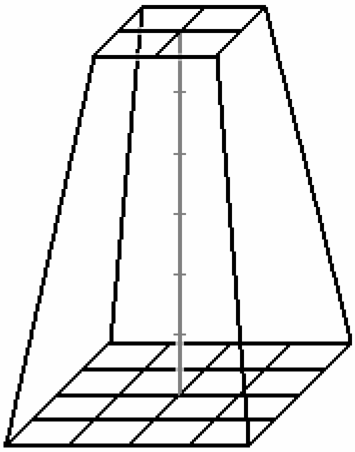


Figura 1: Fotografía del hueso de Ishango

El hueso tiene una serie de muescas que indican procesos de multiplicación y división por dos, una columna con números impares y los primos que existen entre el número 10 y el 20 (11, 13, 17 y 19), de modo que debemos interpretar que el que lo hizo conocía el concepto de la multiplicación y división. Un hueso parecido de 37000 años de antigüedad fue encontrado en Swazilandia (África). Otro, con 57 muescas que data de 32000 años fue encontrado en Checoslovaquia.



Papiro de Moscú: Si se os dice: una pirámide truncada de h = 6 y de base 4 y 2, debes tomar el cuadrado de 4 que es 16, después doblar 4 para obtener 8, tomar el cuadrado de 2 que es 4, sumar 16, 8 y 4 para obtener 28, calcular 1/3 de 6 que es 2, multiplicar 28 por 2 que da 56; veis que es 56; lo has calculado correctamente.

Problema 14 del papiro de Moscú :

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2 + b^2 + ab\right)$$

Los pueblos mesopotámicos (2000 a C) usaban:

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

Figura 2: Pirámide truncada

1850 años antes de Cristo los **babilonios** tenían sólidos conocimientos de casi todos los aspectos de la aritmética elemental. Se encontraron medio millón de tablitas de cerámica con escritura cuneiforme y unas 400 son de matemáticas. En la tablitas hay tablas de multiplicar, trabajos con fracciones, resolución de ecuaciones lineales, etc. Hoy se llama fórmula de BHASKARA (indio, 1114-1185) a la resolvente de la ecuación de segundo grado (Bhaskara investigó en profundidad este problema), pero los babilonios la sabían resolver 3000 años antes. También trabajaron con la ecuación de tercer grado (que hoy se introduce en la Universidad). Ellos usaban el sistema sexagesimal (base 60) que tiene mejores divisores que la base 10, pero es obviamente más difícil, pero aún hoy usamos esa numeración para medir el tiempo y la amplitud de los ángulos. Los babilonios calcularon la $\sqrt{2}$ con cinco cifras decimales. La humanidad ya manejaba la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación con números positivos desde hace unos 4000 años.

Alrededor del año 1650 antes de Cristo los **egipcios** escribieron los que hoy se conocen como papiros matemáticos de **Moscú**, **Rhind** y **Berlín,** donde se describen algoritmos para la multiplicación, el uso de fracciones y cálculos sumamente complicados, como determinar el volumen de una pirámide cuadrada truncada (figura 2), con una base inferior con lados de 4 unidades, una base superior con lados de 2 unidades y una altura de 6 unidades. El resultado que obtuvieron (56 unidades cúbicas) es el correcto. Trabajaban con suma, resta, producto, cociente, series aritméticas y geométricas, ecuaciones lineales, etc.

En el papiro de Berlín que es un poco anterior (≈ 1800 años antes de Cristo) los antiguos egipcios demuestran que podían resolver la ecuación de segundo grado.

Las siete operaciones elementales. Definiciones y restricciones

Se definen las siete operaciones elementales entre dos números **a** y **b** como:

Suma: $a + b$ (Tanto a como b se llaman sumandos).

Resta: $a - b$ (a es el minuendo y b es el sustraendo).

Producto: $a \times b \equiv a \,.\, b \equiv a * b$ (a es el multiplicando y b es el multiplicador, pero ambos son factores) (El símbolo ≡ significa identicamente igual)

División: $a / b \equiv a : b \equiv a \div b$ (a es el dividendo y b es el divisor). **b debe ser diferente de cero, porque la división por cero es una operación prohibida.**

Potencia: $a^b \equiv$ **a^b** (a es la base y b es el exponente).

Raíz: $\sqrt[b]{a}$ (a es el radicando y b es el índice). **b debe ser diferente de cero, porque no tiene sentido la raíz cero de un número.**

Logaritmo: $\log_b a$ (a es el número del logaritmo y b es la base). **b debe ser diferente de cero y también diferente de 1. Caso contrario no tiene sentido el logaritmo.**

Más adelante vamos a comentar detalles del logaritmo.

Los **indos** (alrededor de 800 a 600 años antes de Cristo) usaban números irracionales, números primos, raíces cuadradas y cúbicas, calculaban la superficie del círculo, resolvían ecuaciones lineales y cuadráticas, elaboraban demostraciones del teorema de Pitágoras, etc.

Desde muy temprano, todas estas civilizaciones contaban con el teorema de Pitágoras, mucho antes de que PITÁGORAS (griego, -582,-507) hubiera nacido.

Debe ponerse de relieve el alto respeto y aprecio de las primeras civilizaciones por la aritmética, y en particular debe destacarse el afecto hacia esa parte de la matemática manifestado por la escuela **pitagórica** (Grecia) seis siglos antes de Cristo.

Existe una profunda conexión entre el uso y evolución de las operaciones y el desarrollo del número. Vamos a verlos conjuntamente.

El número natural

Todos hemos dado los primeros pasos en el conocimiento de la aritmética a través de contar con los números naturales. La historia de la humanidad también.

Ellos forman el conjunto $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, ...\}$$

En los orígenes de muchas civilizaciones pareció obvio escribir el número uno como una rayita vertical, el dos como dos rayitas, y así sucesivamente. Al actual número 1 se lo puede pensar como una reliquia viviente de aquella realidad, y es uno de los cinco números fundamentales de la matemática. Los números naturales nacieron con la necesidad contar, tanto cosas concretas (4 hijos, 3 pájaros) como abstractas (2 ideas, 1 sueño) y para ordenar (el tercero de la fila).

La representación gráfica de los números naturales se hace como puntos sobre una recta (fig. 3), formando una sucesión y dejando puntos suspensivos para significar que continúan infinitamente.

Figura 3: Representación gráfica de los números naturales

Como ya hemos dicho las cuatro operaciones elementales sobre números naturales (suma, resta, producto y división) se pierden en la prehistoria.

Dado dos números naturales a y b cualesquiera, el resultado de su suma (a + b), su producto (a × b) y su potencia (a^b) siempre son números naturales. Pero para el resto de las operaciones (resta, potencia, raíz y logaritmo) el resultado puede ser que no sea un natural. Por ejemplo, no son números naturales el resultado de: 12-15 ; 7/5 ; $\sqrt{2}$ y $\log_3 4$.

Esto motiva la búsqueda de extensiones del concepto de número para salvar este obstáculo.

Leyes formales: Principio de permanencia

La extensión del concepto de número debe hacerse mediante un principio de permanencia de las leyes formales, enunciado por Hermann HANKEL (alemán, 1839-1873): “Al generalizar un concepto se debe tratar de conservar el mayor número de propiedades, y el nuevo concepto debe corresponder como caso particular del anterior”.

Por ejemplo, consideremos la extensión de los números naturales a los enteros, y sea el producto el concepto a conservar. Lo que fija el principio de permanencia en este caso es que el producto de enteros debe conservar la mayor cantidad posible de las propiedades que tiene el producto de naturales y que las propiedades del producto en el campo de los números enteros deben ser iguales a las de los números naturales para el caso particular en que los factores sean números naturales.

Este debe ser así para todas las extensiones (naturales → enteros → racionales → reales → complejos) y para las generalizaciones de cualquier concepto (suma, resta, multiplicación, división, potencia, raíz y logaritmación).

Números enteros

La primera extensión son los números enteros, que forma el conjunto $\mathbb{Z}$, y que resulta de agregar los números negativos y el cero a los naturales.

$$\mathbb{Z} = \{ ...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

La representación gráfica de los números enteros se hace como puntos sobre una recta, ahora desde menos infinito a más infinito:

Figura 4: Representación gráfica de los números enteros

Una consecuencia de los enteros es que existen números que son menores que cero: todos los negativos. Esto llevó a que por mucho tiempo la **soluciones negativas**, por ejemplo 12 - 17, fueron consideradas “falsas” porque no las podían pensar como parte del mundo real. Era difícil imaginar un número negativo de ovejas, ya que era algo menor que cero.

Las primeras menciones en la historia de los números negativos proceden de la China y de la India. Los **chinos**, entre 100 y 50 años antes de Cristo, trabajaban con coeficientes positivos (que escribían con barras rojas) y negativos (que escribían con barras negras). O sea exactamente al revés de la convención que se usa hoy en economía, ya que los números en rojo se entienden como negativos mientras que los azules o negros se entienden como positivos. Por eso se dice que las finanzas de una persona están en rojo si tiene más deudas (negativo) que capital (positivo). Los chinos resolvían sistemas de ecuaciones que involucraban a números negativos. Aproximadamente al mismo tiempo en la India hacían cálculos con números negativos a los que distinguían usando el signo "+" como signo negativo.

Tres siglos después de Cristo, DIOFANTO de Alejandría (griego, ≈ 200/214, ≈284/298), en su libro Aritmética, califica a la ecuación

$$4\,x + 20 = 0$$

(cuyo resultado es una x = -5) como absurda. Los números negativos no existían en el Mediterraneo.

Introducción de los números negativos

La introducción elemental de los números negativos puede presentar alguna dificultad. Pero no es demasiado traumática. Veamos ejemplos:

Un niño tiene $ 10 y le pide prestado $ 20 a su hermano mayor. ¿Cuánto dinero propio tiene? En el bolsillo tiene $ 30 pero como debe $ 20 al hermano entonces sólo tiene $ 10 propios:

Dinero propio = \$ 10 + \$ 20 - \$ 20 = \$ 10

Luego gasta $ 25 en la compra de un libro. Ahora ¿cuánto dinero propio tiene? En total le quedan $ 5 en el bolsillo pero como debe $ 20, realmente le faltan $ 15 para no tener nada. O sea:

Dinero propio = 10 + 20 - 20 - 25 = -15

y por eso es correcto pensar que tiene $ 15 negativos (- $ 15). Se observa la conveniencia de asociar los números negativos a la deuda.

Otro problema. Un padre tiene 32 años y el hijo 5. ¿De acá a cuántos años el papá tendrá 10 veces la edad del hijo?

Sea x el tiempo buscado. De acá a x años el padre tendrá 32 + x y el hijo 5 + x años. Como el padre debe tener 10 veces más que el hijo, esto escrito como una ecuación es:

$$32 + x = 10\,(5 + x) = 50 + 10\,x$$

$$\therefore \qquad 32 - 50 = 10x - x = 9\,x$$

y el resultado es x = - 2, lo que significa que hace dos años se cumplía lo que pide el problema. Y esto es cierto, hace dos años el hijo tenía 3 años y el papá tenía 30, o sea diez veces más que el hijo. [Y.PERELMAN-Álgebra Recreativa-Mir-(1978)]

Las operaciones con números negativos

Una consecuencia de la incorporación de los números negativos es que la suma y la diferencia se integran en los enteros es una sola operación:

$$4 - (+\,2) \equiv 4 + (-\,2) = 2$$

(restar significa sumar su opuesto)

El producto de un positivo (o sea un natural) por otro positivo es un número positivo. Esto es obvio para mantener las reglas formales ya usadas en los naturales.

Un positivo por un negativo es un número negativo y también un negativo por un positivo. Si entiendo las ganancias como valores positivos y las pérdidas como valores negativos, y perdí una apuesta con 7 amigos, y a cada uno de ellos le había apostado $ 2, es decir, con cada uno tengo una deuda (negativa) de $ 2, entonces la deuda total que tengo es $ 14. O sea: $7 \times (-2) = -\,14$.

Veámoslo con un poco de mayor rigor: suponiendo que no supiéramos cuánto es el resultado de + × - ó de - × +. Usando la propiedad distributiva, dados tres números naturales a, b y c tendremos que:

$$(a - b) \times c = a \times c \text{ ¿}\pm\text{? } b \times c$$

y expresamos como una duda ¿±? el signo del producto de - b × c. Observamos que si a = b, entonces necesariamente (a - b) × c debe ser nulo. Y para que esto ocurra es imprescindible que el signo sea negativo. De modo que el producto de + × - ó de - × + debe ser negativo.

Negativo por negativo da positivo. Veamos con un ejemplo la razón de este raro resultado. Haciendo primero las restas y después multiplicando sabemos que:

$$(7 - 2) \times (5 - 3) = 5 \times 2 = 10$$

Usando la propiedad distributiva se debe obtener este mismo resultado:

$$(7 - 2) \times (5 - 3) =$$

$$7 \times 5 + 7 \times (-3) + (-2) \times (5) ¿\pm? (-2) \times (-3) =$$

$$35 - 21 - 10 ¿\pm? (-2) \times (-3) = 10$$

donde nuevamente escribimos ¿±? para representar la duda con respecto a qué signo (+ ó -) debe tener el resultado. Pero no queda más remedio que éste sea positivo:

$$(-2) \times (-3) = +6$$

para que la suma 35 - 21 - 10 + 6 sea igual a 10.

Explicado en términos más generales, si tengo dos números naturales a y b y calculamos:

$$(a - b) \times (a - b) = a^2 - 2 a b ¿\pm? b^2$$

nuevamente observamos que si a = b entonces el resultado es nulo e imprescindiblemente (-b)×(-b) tiene que ser + b^2 , es decir, - × - debe ser +.

Otro resultado interesante (y coherente con operaciones con potencias que se mostrará más adelante), es que

$$a^{-b} = 1/a^b$$

mientras que las raíces con índice par de números negativos, tal como

$$\sqrt[2]{-25} \equiv \sqrt{-25}$$

no tienen solución dentro del campo de los enteros, y ni siquiera dentro del campo de los reales.

Seis siglos después de Cristo en la India ya habían adoptado los números negativos para representar deudas. En el año 628 el matemático BRAHMAGUPTA (indio, 598-670) discute el uso de los números negativos para la forma general de la ecuación de segundo grado, encuentra soluciones negativas también de las ecuaciones de segundo grado y expresa reglas para trabajar con números negativos y con el **cero**. Él llama a los números positivos como “fortunas”, al cero como cifra y a los números negativos como deuda. Cinco siglos más tarde Bhaskara también da las soluciones negativas de las ecuaciones de segundo grado, pero las rechaza como inapropiadas en el contexto del problema.

El mundo islámico toma conocimiento en el siglo VIII de las ideas de Brahmagupta y en el siglo X los matemáticos árabes usaban los números negativos en el concepto de endeudamiento.

Los matemáticos europeos tomaron conocimiento de los números negativos a través de traducciones de trabajos árabes e indos. Pero se resisten al concepto de números negativos hasta el siglo XVII. Una excepción fue Leonardo de PISA, o PISANO o BIGOLLO, también llamado FIBONACCI (italiano, ≈1170/1180-1250) que usó números negativos interpretandolos como débitos y más tarde como pérdidas. De paso vale la pena acotar que Fibonacci fue quien introdujo los números arábigos en Europa. El primer trabajo europeo que usó números negativos fue el de Nicolas CHUQUET (francés, 1445/1455 - 1488/1500) en el siglo XV, usándolos como exponentes (con el mismo concepto actual de exponente negativo) pero advirtiendo que eran números absurdos. En 1750 el matemático inglés Francis MASERES (inglés, 1731-1824) dijo que “***los números negativos oscurecen la doctrina completa de las ecuaciones y hacen oscuras a las cosas que en su naturaleza son excesivamente obvias y simple”***. Él llegó a la conclusión de que los números negativos no existen.

Los números negativos no fueron bien entendidos hasta los tiempos modernos. Era práctica común ignorar todo resultado con números negativos con la idea de que no tenían sentido. Esta práctica, lamentablemente, sigue en parte hasta nuestros días. Un formulario norteamericano actual dice:

> *"Si la línea 61 es mayor que la línea 54, reste la línea 54 de la línea 61. Ésta es la cantidad (positiva) que usted ha pagado de más."*
>
> *"Si la línea 54 es mayor que la línea 61, reste la línea 61 de la línea 54. Ésta es la cantidad (positiva) que usted debe."*

Los números negativos siguen relativamente cuestionados. Cualquier chico sabe que al tomar un ascensor en la planta baja si aprieta el botón +2 del ascensor sube dos pisos y si aprieta el botón -2 baja dos pisos, hacia el subsuelo, o una temperatura de 5 grados bajo cero es cinco grados menor que el cero, pero los negativos todavía no entraron en la escuela primaria.

Una consecuencia inmediata que resulta al unir los números naturales a los negativos es la necesidad de un nuevo número, el cero:

$$3 - 1 = 2$$

$$3 - 2 = 1$$

$$3 - 3 = 0$$

Sin el cero tendríamos operaciones sin resultado, y el conjunto tendría un agujero lógico.

En la antigüedad no existía el número cero. Durante miles de años los babilonios usaron símbolos escritos para representar números sin usar el cero. El cero al principio se usó para ocupar una posición vacía y poder distinguir así números como 345, 3045, 3405 ó 3450, pero no para ser usado en operaciones. En el siglo I los mayas ya tenía el cero (un óvalo con un arco inscrito). Cinco siglos después, los hindúes usaron un círculo o un punto para representar al cero, pero el punto cayó en desuso más tarde. La palabra cero en hindú era *śŭnya,* que significa hueco o vacío; esta palabra pasó al árabe como *sifr,* que es la raíz de las palabras *cifra* y *cero.*

Dada sus especiales características, el cero tiene bien ganado el derecho de ser uno de los cinco números más importantes de la matemática. Con los números enteros desaparecen las limitaciones a la resta, y la suma y la diferencia de dos números enteros también es un entero.

Operaciones que involucran al cero

Sea $a \neq 0$, entonces:

$a + 0 = 0 + a = a$

$a - 0 = - 0 + a = a$

$a \times 0 = 0 \times a = 0$

$0/a = 0$

$a/0$ ¡operación prohibida!

$a^0 = 1$

$0^a = 0$

$\sqrt[0]{a}$ ¡operación prohibida!

$\log_a 1 = 0$

$\log_a 0$ no tiene sentido como operación, pero tiende a menos infinito

$\log_0 a$ ¡operación prohibida!

La incorporación de los números negativos y el cero lleva a que los números enteros sea un conjunto cerrado para la suma y su operación inversa, la resta. O sea que sumando y restando enteros el resultado siempre pertenece al conjunto de los números enteros.

No ocurre así con la potencia, la raíz o el logaritmo. Un número natural elevado a un número natural es siempre un número natural, pero un entero elevado a una potencia entera no siempre es un entero (El resultado de $4^{-2} = 1/4^2 = 1/16$ no es un entero). En este sentido retrocedimos con respecto a los naturales. Los enteros tampoco son cerrados a la radicación ya que en general la raíz de un entero no es un entero (por ejemplo $\sqrt{2}$) y tampoco lo es en general frente a la operación de logaritmación (por ejemplo, $\log_3 4$). Debemos buscar una nueva extensión para remediar esta imposibilidad de operación.

Números racionales

Los números racionales se expresan como el cociente de dos números enteros, o sea m/n donde m y n son enteros. Como caso particular, si n = 1, entonces m/n = m/1 = m y comprende a todos los enteros. El conjunto de los racionales se llama $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{\, m/n : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \}$$

Ese cociente m/n permite infinitas representaciones del mismo número.

$$2/3 = 4/6 = 5/15 = 6/9 = \ ...\ = 1024/1536 = ...$$

Cuando m y n no tienen divisores comunes (como 2/3) se dice que es una fracción irreducible.

Figura 5: Representación gráfica de los números racionales

Los racionales ya tienen varios milenios de vida. Los egipcios hace unos 4000 años expresaban cualquier número racional positivo como la suma de las recíprocas de enteros positivos. Por ejemplo:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21}$$

Esta representación no es unívoca y también aquí hay infinitas posibilidades. Pero este resultado demuestra que sabían trabajar con fracciones, si bien sólo con numeradores y denominadores positivos.

También los babilonios trabajaban con fracciones. Todo número decimal que tenga un número finito de cifras o que sea periódico es un número racional, y todo racional se expresa en forma decimal con un número finito de cifras o como un decimal periódico. Se puede demostrar que ambas formas son equivalentes. Como ejemplos:

$$7/5 = 1{,}4$$

$$1/3 = 0{,}33333333333... = 0{,}\overline{3}$$

$$1/23 = 0.04347826086956521739130434782608695652173913043478260\,86... =$$

$$0.\overline{0434782608695652173913}0$$

Si pusiéramos los números racionales sobre una recta encontraríamos que forman un conjunto **denso** en la misma, en el sentido de que si elegimos un punto cualquiera de la recta, alrededor de él y tan cerca como queramos, vamos a encontrar números racionales. En consecuencia la representación gráfica se hace sobre una recta desde $-\infty$ a $+\infty$, alrededor de cada punto de la recta habrá racionales aunque, como veremos más adelante al hablar de los reales, hay infinitos puntos sobre la recta que no son números racionales.

Dado dos números racionales A y B se puede determinar siempre si A > B, si A < B o si A = B, propiedad que también tienen los naturales y los enteros, y permite definir una relación de orden entre números de estos conjuntos.

Otra propiedad notable es que pueden ponerse en correspondencia con los números naturales, y de este modo pueden numerarse. O sea que se puede hacer una doble fila (infinita) donde en una de la filas tenemos los números naturales y en la otra los números racionales irreducibles. Para ello se usa como criterio de orden que sea anterior el número fraccionario que tenga la menor suma de sus dos términos (la suma del númerador y del denominador), en caso de igual suma el de menor denominador y en caso de igual suma e igual denominador el que sea positivo. Así resulta la ordenación (la columna de la izquierda con los números 1, 2, 3, ..., 20 es la de los números naturales y la de la derecha es la de los números racionales):

1	1/1	11	4/1
2	-1/1	12	-4/1
3	2/1	13	3/2
4	-2/1	14	-3/2
5	1/2	15	2/3
6	-1/2	16	-2/3
7	3/1	17	1/4
8	-3/1	18	-1/4
9	1/3	19	5/1
10	-1/3	20	-5/1

donde va quedando perfectamente definido el orden de cualquier número racional.

El producto de dos racionales es otro racional, cuyo numerador es el producto de sus numeradores y su denominador el producto de sus denominadores ($b \neq 0$, $d \neq 0$):

$$a/b \times c/d = (a\times c) / (b\times d)$$

y como consecuencia inmediata el producto de un racional (a/b) por su inversa (b/a) es la unidad ($a \neq 0$, $b \neq 0$):

$$a/b \times b/a = (a\times b)/(a\times b) = 1$$

de modo que

$$1/(a/b) = b/a$$

Como consecuencia de que $1/(c/d) = d/c$ tendremos:

$$(a/b) / (c/d) = (a/b)*(d/c) = (a*d)/(b*c)$$

y observamos que dividir un número racional por otro es equivalente a multiplicarlo por su inversa. Los números racionales integran el producto y el cociente en una misma operación.

También se integran las potencias con las raíces, ya que:

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{b}{a}} \equiv \sqrt[a]{\left(\frac{c}{d}\right)^{b}} \equiv \sqrt[\frac{a}{b}]{\left(\frac{c}{d}\right)}$$

Operaciones con potencias

Si a es cualquier número diferente de cero y n es entero, entonces:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\leftarrow n \text{ veces} \rightarrow}$$

En consecuencia

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

Dado que:

$$a^n \div a^n = 1$$

obtenemos:

$$a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$$

resultado válido para cualquier "a" diferente de cero.

Por otro lado:

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

La suma y la operación inversa (resta) de dos racionales es otro racional y el producto y la operación inversa (cociente) también es otro racional. De este modo vemos que se ha logrado un significativo avance, ya que los racionales forman un conjunto cerrado frente a la suma y frente al producto.

No ocurre lo mismo frente a la potencia, la raíz y el logaritmo entre racionales, ya que muchas veces el resultado no es un racional [por ejemplo $5^{½}$, $\sqrt{-4}$, $\log_5 7$]. Hay que seguir buscando para llegar en algún momento a un conjunto tal que sea cerrado a las siete operaciones

Números irracionales

Se llaman números irracionales a los números que no se pueden expresar como un cociente m/n, donde m y n sean enteros, y se llama $\mathbb{J}$ al conjunto de los números irracionales:

$\mathbb{J}$ = puntos de la recta real que **no** pueden expresarse como m/n con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$

Es obvio de su definición que el conjunto de los racionales no tiene puntos en común con el conjunto de los irracionales. Un número es racional o es irracional, pero no puede ser simultáneamente las dos cosas. Una consecuencia inmediata es que los números irracionales se expresan en forma decimal con un número infinito de decimales que no tienen ningún período, ya que si se pudiera expresar con un número finito de cifras, o como un decimal periódico, sería un racional.

Los griegos demostraron que $\sqrt{2}$ no es un número racional porque de ningún modo podían expresar esta raíz como un cociente a/b, con a y b naturales (tampoco con enteros). (La demostración es por el absurdo).

Lo mismo puede demostrarse con las raíces cuadradas de cualquier número que no sea un cuadrado perfecto. O sea que se puede demostrar que $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$, etc. son irracionales. En cambio $\sqrt{4}$ ó $\sqrt{9}$ son racionales ya que 4 ó 9 son cuadrados perfectos y sus raíces dan como resultado a 2 ó 3. De igual modo son irracionales las raíces cúbicas, cuartas, quintas, etc. de todos los números si se excluyen las potencias perfectas. Estos puntos son infinitos, y no son racionales ya que no están incluidos en la definición de los racionales. No se pueden escribir como decimales periódicos. Hay infinitos puntos irracionales sobre la recta. ¡De hecho hay infinitamente más números irracionales que racionales!

Se llaman irracionales algebraicos a los irracionales que son raíces de números racionales, o los que son soluciones de polinomios de cualquier grado con coeficientes reales. Tal es el caso, para el grado igual a 2, de las dos raíces de:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

($a \neq 0$) siempre y cuando a, b y c sean reales, y que su discriminante $\{b^2 - 4\,a\,c \geq 0\}$ sea mayor o igual que cero.

Pero también existen irracionales que son soluciones de ecuaciones trascendentes, tal como soluciones de funciones trigonométricas, exponenciales, logaritmos, etc., y que en ningún caso pueden ser soluciones de polinomios:

$\sin 17^o = 0{,}29237170472273672809746869537714325266 47...$
$e^{32} = 78962960182680{,}695160978022635108224219956195115352 33...$

$\log_4 5 = 2{,}82192809488736234787031942948939017586 5....$

A esos números irracionales se los llama trascendentes. Dos casos particularmente interesantes son **π** y **e**.

Número π

Primero vamos a ver diferentes cálculos del valor de π, y luego vamos a comentar su carácter de número irracional.

Es bien conocido que el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es una constante llamada universalmente "π". Por razones prácticas y teóricas interesa conocer con bastante precisión el valor de π.

> *"Hizo fundir asimismo un mar de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo. Tenía cinco codos de altura y a su alrededor un cordón de treinta codos (I Reyes 7,23) (II Crónicas 4,2)"*

Esto nos da un valor de π igual a 3, seguramente obtenido por medición directa. En Egipto y en la Mesopotamia se usaban valores más precisos, $25/8 = 3{,}125$ y $\sqrt{10} = 3{,}162...$ En el papiro Rhind se da un valor de $4\,(8/9)^2 = 3{,}16049...$

El primer cálculo teórico conocido fue el de ARQUÍMIDES de Siracusa (griego -287, -212) que obtuvo:

$$223/71 < \pi < 22/7$$

$$\therefore \quad 3 + 10/71 < \pi < 3 + 10/70$$

$$\therefore \quad 3{,}1408 < \pi < 3{,}1428$$

como cotas inferior y superior de un polígono regular inscripto y uno regular circunscripto. Para obtener esta precisión debió manejar polígonos de alrededor de 90 lados.

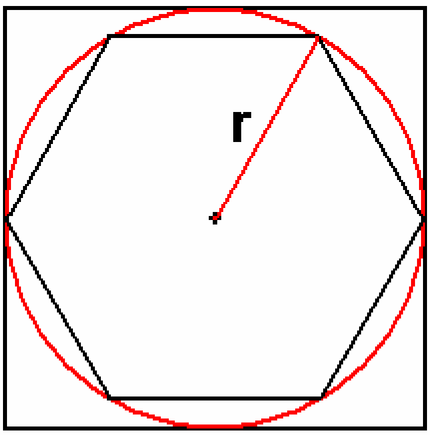


Figura 6: Polígonos inscriptos y circunscriptos

Estos resultados se mejoran cuando se usan polígonos con mayor número de lados. Así se fue logrando:

Matemático	Fecha	Cantidad de	Valor

		decimales	
Papiro Rhind	- 2000	1	3,16045 (= 4(8/9)2)
Archimedes	- 250	3	3,1418 (promedio)
Vitruvius	- 20	1	3,125 (= 25/8)
Chang Hong	130	1	3,1622 (= √10)
Ptolemeo	150	3	3,14166
Wang Fan	250	1	3,155…(= 142/45)
Liu Hui	263	5	3,14159
Zu Chongzhi	480	7	3,141592920 (= 355/113)
Aryabhata	499	4	3,1416 (= 62832/2000)
Brahmagupta	640	1	3,1622 (= √10)
Al-Khwarizmi	800	4	3,1416
Fibonacci	1220	3	3,141818
Madhava	1400	11	3,14159265359
Al-Kashi	1430	14	3,14159265358979
Van Ceulen	1596	35	3,14159265358979323846264338327950 29
....	....	....	....
Rutherford	1824	440	
....	....	....	
Ferguson	1947	710	Con computadora
Genuys	1958	10.000	Con computadora
Guilloud,Bouyer	1973	1.001.250	Con computadora
Chudnovskys	1989	1.011.196.691	Con computadora
Kanada, Takahashi	1999	206.158.430.000	Con computadora

Hasta el resultado de Ludolf van CEULEN (alemán, 1540-1610) se calculaba siguiendo el método de Arquímides, tomando la longitud de la circunferencia como un valor intermedio entre perímetros de polígonos inscriptos y circunscriptos.

John WALLIS (inglés, 1616-1703) hizo un progreso notable: encontró una fórmula para determinar π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times...}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times...}$$

que hoy se la conoce como el producto de Wallis. Pi/2 esta dado por el cociente de dos productos infinitos. El numerador es el producto repetido de los números naturales pares y el denominador es el producto repetido de los naturales impares. Esta fórmula fue prontamente mejorada, no se sabe bien si por Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (alemán, 1646-1716) o por James GREGORY (1638- 1675), aunque sigue siendo lentamente convergente:

$\pi/_4 = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + ...$

o sea sumas y restas alternadas de los inversos de los números impares, hasta infinito. Con cálculos manuales y fórmulas mejoradas se llegaron a determinar hasta 620 cifras de π. Con la computadora se ha calculado π con más de 200.000.000.000 de cifras. Esto realmente es un entretenimiento académico y no una necesidad práctica. Sólo se necesitan 20 dígitos de π si se quisiera calcular la circunferencia de la órbita de la Tierra con una precisión igual al espesor de un cabello.

Una forma de memorizar los 20 primeros dígitos es con este poema, sólo hay que contar las letras de cada palabra:

Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros

cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros

Las primeras 60 cifras de π son:

$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592 3...$

En ningún caso se encontró un período en la expresión decimal de π lo que permitía sospechar que no era un número racional. El paso siguiente lo dio Johann Heinrich LAMBERT (alemán, 1728-1777) en 1761 quien demostró que π es un número irracional. En 1882 Ferdinand von LINDEMANN (alemán, 1852, 1939) avanzó aún más y demostró que π es un número trascendente, lo que significa que no existe ningún polinomio de ningún grado, con coeficientes racionales, que tenga a π como raíz.

π integra el club de los cinco números más importantes de las matemáticas.

Logaritmos

Determinar el logaritmo de ***c*** en base ***a*** es encontrar el exponente ***b*** tal que ($a \neq 0$ y $a \neq 1$):

$$a^b = c$$

o sea:

$$\log_a c = b$$

por ejemplo, el logaritmo de 8 en base 2 es 3:

$$\log_2 8 = 3$$

ya que

$$2^3 = 8$$

O sea que el logaritmo es la potencia a la que hay que elevar a "***a***" (que se llama base) para obtener a "***c***".

Antes del desarrollo de las computadoras y las calculadoras, el uso de las tablas de logaritmos simplificaba mucho los cálculos, ya que con logaritmos un producto se calcula mediante una suma y una potencia con un producto. Se baja un nivel la dificultad (ver operaciones con logaritmos).

Los logaritmos nacieron en la antigua India, dos siglos antes de Cristo. Cuatro siglos después los indos ya usaban los logaritmos en base 2 para calcular diferentes operaciones matemáticas. VIRASENA (indio, siglo VIII) describe logaritmos en base 2, 3 y 4. En el siglo XIII los matemáticos árabes ya tenían tablas de logaritmos.

Operaciones con logaritmos

Los logaritmos de productos, cocientes, potencias o raíces tienen las siguientes propiedades:

$$\log_a (b \times c) = (\log_a b) + (\log_a c)$$

$$\log_a (b \div c) = (\log_a b) - (\log_a c)$$

$$\log_a (b^c) = c \times (\log_a b)$$

$$\log_a (\sqrt[c]{b}) = (\log_a b)/c$$

(o sea que el producto o cociente pasa a ser una suma o una resta y la potencia y la raíz pasa a ser un producto o un cociente)

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a^b = b$$

Los logaritmos de sumas o restas no se simplifican:

$$\log_a (b + c) = \log_a (b + c)$$

$\log_a (b - c) = \log_a (b - c)$

En el siglo XVII, el relojero Joost (o Jobst) BÜRGI (suizo, 1552-1632) descubre los logaritmos como una herramienta de cálculo, aunque no publica su descubrimiento hasta 1620. En 1614 John NAPIER, (escocés, 1550-1617) publica un libro con resultados similares, y de allí en adelante se habla de los logaritmos neperianos. El uso de los logaritmos es una contribución importante para el avance de las ciencias y de la técnica, en particular de la astronomía, la agrimensura, la navegación y de otras ramas de las matemáticas. Napier llama "números artificiales" a los logaritmos y número naturales a los "antilogaritmos". La palabra logaritmo la formó Napier de λογοζ (*logos*), razón, cociente, proporción y αριθμοζ (*arithmos*), número, debido a que una serie aritmética de logaritmos corresponde a una serie geométrica de números. Para trabajar con logaritmos eran necesarias tablas que fueron calculadas con diferente cantidad de decimales (desde 8 en adelante; Adams calculó el logaritmo de *e* en base 10 con 272 decimales en 1887).

Las calculadoras y las computadoras volvieron obsoleto el uso de la tabla de logaritmos como herramienta de cálculo. No obstante el concepto de logaritmos es de suma importancia para resolver problemas concretos. Por ejemplo, si un país aumenta su población en un 2 % anual, ¿en cuánto tiempo duplica su población?

(Respuesta: tiempo = $\text{Log}_a 2/\text{Log}_a 1{,}02 = 35$ años; es práctico resolverlo trabajando en base 10 (a = 10) ó en base e (a = e).

Los logaritmos son imprescindibles en la matemática superior.

Número e

"e" resulta un número definitivamente importante pero difícil de presentar. Apareció primero en el cálculo de los logaritmos y más tarde en toda la matemática superior. En una primera definición "e" es el **límite** de $(1 + 1/n)^n$ para n tendiendo a infinito:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

o sea el valor al que va tendiendo $(1 + {}^{1}/_{n})^{n}$ cuando n va creciendo indefinidamente, tomando valores cada vez más grandes.

En una segunda definición es el resultado de la suma infinita (o sea tomando infinitos términos) de la serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

donde $2! = 1\times2 = 2$

$3! = 1\times2\times3 = 6$

.....

$n! = 1\times2\times3\times...\times(n-1)\times n$

y la suma no diverge, sino que se mantiene acotada (siempre es menor que 3).

Una tercera definición de "e" es la **fracción continua**:

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

donde se van agregando infinidad de divisores.

En los tres casos el resultado final es el mismo. A continuación se da una tabla donde se muestra como evolucionan los resultados de las tres definiciones para n creciendo indefinidamente.

n	**Primera definición**	**Segunda definición**	**Tercera definición**
1	2,0000	2,0000000000	2,0000000000
2	2,2500	2,5000000000	3,0000000000
3	2,3704	2,6666666666	2,6666666666
4	2,4414	2,7083333333	2,7500000000
5	2,4883	2,7166666666	2,7142857142
6	2,5216	2,7180555555	2,7187500000
7	2,5465	2,7182539682	2,7179487179
8	2,5658	2,7182787698	2,7183098591
9	2,5812	2,7182815255	2,7182795698
10	2,5937	2,7182818011	2,7182835820
100	2,7049	2,7182818284	2,7182818284

Hoy en día, con computadora, puede calcularse "e" con la cantidad de cifras que se desee.

En el desarrollo decimal de "e" no se observa ningún período lo que es un indicio de que podía ser un número irracional. La mayoría de la gente acepta que fue Leonhard EULER (suizo, 1707–1783) el primero que probó que "e" es irracional. En 1873 Charles HERMITE (francés, 1822-1901) probó que "e" no es un número algebraico (o sea que es trascendente).

Las primeras 60 cifras del valor de "e" son

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496697$$

Se llama función exponencial a la potenciación

$$y = a^x$$

pero de ordinario se acepta como exponencial (o exponencial natural) a la función

$$y = e^x$$

ya que cualquier otra potencia se puede reducir a la exponencial

$$y = a^x = e^{x \ln a}$$

La exponencial varía lentamente para $x < 0$ y crece abruptamente para $x > 0$. Para $x = 1$, $y = 2{,}7182.. = e$; para $x = 3$, $y = 20{,}085...$; para $x = 10$, $y = 22026{,}466...$). La exponencial es una de las funciones más importantes de las matemáticas, caracterizada por un rápido crecimiento. De allí proviene el concepto de "crece exponencialmente" cuando nos referimos a algo que aumenta muy rápido.

Dado $e^a = b$, se define como logaritmo natural a la potencia (en este caso es "a") a que debe elevarse a "e" para que el resultado sea "b". Convencionalmente se escribe $\ln \equiv \log_e$:

$$\log_e b \equiv \ln b = a$$

Napier publica en 1618 los logaritmos naturales de varios números, sin reconocer que eran logaritmos en base "e".

En 1624 Henry BRIGGS (inglés 1561-1630) y Grégoire de SAINT-VINCENT (belga, 1584-1667) en 1647 rozan a "e" pero la esquivan.

En 1661 Huygens enfrenta a "e" explícitamente cuando calcula la superficie de la hipérbola.

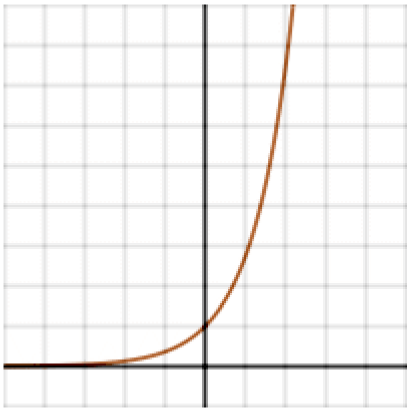


Figura 7: Función exponencial

En 1683 Jacob BERNOULLI (suizo, 1654-1705) trabaja con interés compuesto con capitalización continua y encuentra a "e" como un límite. Es la primera vez en la historia de la matemática que se definía el valor de un número como resultado de un límite. Bernoulli no advierte la conexión entre su trabajo y los logaritmos.

En 1690 Leibniz le escribió una carta a Huygens y usó la b para lo que hoy llamamos "e". Por fin "e" tenía un nombre y era reconocido.

Johann BERNOULLI (suizo, 1667-1748) comenzó el estudio de la función exponencial en 1697. Mucha de la actual notación matemática se le debe a Euler y no resulta extraño que la actual notación de "e" sea también de él.

El número "e" es fundamental en toda la matemática superior, pero aparece también en la vida diaria. Colguemos una cadena por sus extremos entre dos postes (puede ser un cable muy flexible o un piolín). Bajo la acción de la gravedad la cadena toma la forma de una curva más o menos "panzona" según cuan tensionada se encuentre. Esa curva se llama catenaria. La ecuación que la describe y el gráfico de la misma para diferentes "a" ("a" depende de la tensión de la cadena) son:

$$y = (a/2)\,(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

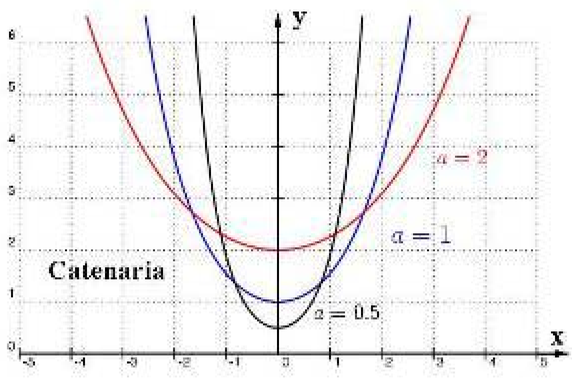


Figura 8: La catenaria en función de x para tres valores del parámetro "a"

Observemos que la ecuación depende de "e" (suma de exponenciales). También se describen con exponenciales el crecimiento de poblaciones, la inflación de un país, el decaimiento radioactivo de los elementos naturales o artificiales, muchos procesos biológicos, etc.

El número "e" también es parte del club de los cinco números más importantes.

Números reales

La unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) con el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{J}$) forman el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Esto se puede escribir como:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$$

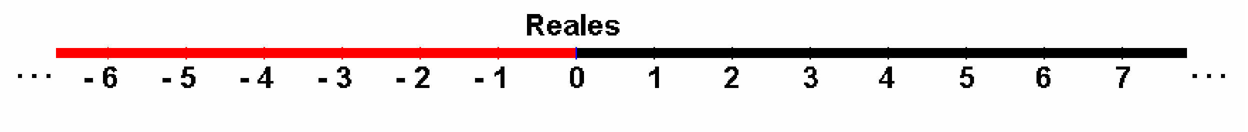


Figura 9: Representación gráfica de los números reales

Como cada punto sobre la recta es un racional o es un irracional, los reales cubrirán totalmente a la recta desde menos infinito hasta más infinito sin dejar ningún lugar vacío. Su gráfica por tanto cubre toda la recta (fig. 9).

El desarrollo del cálculo o análisis matemático (a fines del siglo XVII y en el transcurso del siglo XVIII) usaba todo el conjunto de los números reales sin preocuparse de una definición clara y rigurosa de los mismos. La primera definición rigurosa fue dada por Georg Ferdinand Ludwig Phillipp CANTOR (alemán, 1845-1918) en 1871. En 1874 él mostró que los números reales forman un conjunto no numerable, o sea que no pueden ponerse en correspondencia con los números naturales. Tres años más tarde Cantor publicó lo que hoy se conoce como el argumento diagonal y que reafirma el concepto de conjunto infinito no numerable. O sea que no existe modo de ponerlos en correspondencia con los números naturales.

Dado dos números reales C y D se puede determinar siempre si C > D, si C < D o si C = D. Si se tiene un conjunto finito de números reales uno puede ordenarlos estrictamente de menor a mayor, o viceversa.

Los reales, al igual que los racionales, es un conjunto cerrado para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Con los reales se pueden calcular raíces naturales pares de números reales positivos, raíces naturales impares de reales positivos y negativos, logaritmos de números reales positivos con base real positiva, pero los reales no forman un conjunto cerrado con estas operariones: No se pueden extraer raíces pares ni logaritmos de números reales negativos, ni tampoco se pueden calcular en general todas las raíces posibles (la raíz enésima tiene n resultados diferentes). Hace falta una ampliación más de los números para cubrir estas deficiencias.

Números imaginarios y complejos

El cuadrado de un número positivo es un número positivo [$(+2)^2 = +4$]. El cuadrado de un número negativo también da como resultado un número positivo [$(-2)^2 = +4$]. Por lo tanto la raíz cuadrada de un número positivo tanto puede ser positiva como negativa [$\sqrt{+4} = \pm 2$]. Y se genera el problema de cuánto vale la raíz cuadrada de un número negativo [$\sqrt{-4} =$ ¿?]. La forma de resolverla es la siguiente:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)*(+4)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{+4} = \pm 2\sqrt{-1}$$

y llamamos $\boldsymbol{i}$ a la $\sqrt{-1}$, de modo que finalmente queda:

$$\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2\,\boldsymbol{i}$$

*"**i**"* es la unidad imaginaria y es evidente de su definición que $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Esta unidad imaginaria es el quinto y último socio del club de los cinco números más importantes.

Los números imaginarios son el producto de números reales por *"**i**"* . A su vez los números complejos son la suma de un número real más un número imaginario. O sea que un número complejo se puede expresar como:

$$a + b\,\boldsymbol{i}$$

donde a y b son números reales e *"i"* es la unidad imaginaria. Todos los números imaginarios (o sea todos los números que pueden escribirse como b $\boldsymbol{i}$) forman el conjunto $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I} = \{ b\,\boldsymbol{i} : b \in \mathbb{R} \,,\, \boldsymbol{i} = \sqrt{-1} \}$$

El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$) es la unión del conjunto de los reales ($\mathbb{R}$) y el conjunto de los imaginarios ($\mathbb{I}$)

$$\mathbb{C} = \{ a + b\,\boldsymbol{i} : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \,,\, \boldsymbol{i} = \sqrt{-1} \}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \mathbb{I}$$

Forma cartesiana y forma polar

Los números complejos pueden escribirse como la suma algebraica de un real y un imaginario:

$$a + b\,\boldsymbol{i}$$

De este modo podemos pensar a cada número complejo como un punto de un plano, donde las abscisas sean los reales y las ordenadas sean los imaginarios. Esta es la forma cartesiana y la representación en un plano se debe a Argand (diagrama de Argand).

También es posible representarlos en forma polar. Para ello se toma el módulo (llamémoslo "ρ") que satisface la expresión:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y el ángulo θ (se lo llama argumento) definido como:

$$\tan\theta = b/a$$

Si conocemos a y b podemos determinar ρ y θ. Recíprocamente, si conocemos ρ y θ se puede determinar a y b mediante las fórmulas:

$$a = \rho\cos\theta$$

$$b = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Más adelante discutiremos la fórmula de Euler que es:

$$e^{\,i\,\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y con esta fórmula podemos relacionar directamente la forma cartesiana con la forma polar:

$$a + b\,\boldsymbol{i} = \rho\cos\theta + \boldsymbol{i}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta = \rho\, e^{\,i\,\theta}$$

(a θ se le puede sumar 2π, 4π, 6π, ... etc.)

A la derecha vemos la gráfica en el plano complejo de

$$2 + 2\,\boldsymbol{i} = \sqrt{8}\, e^{\,i\,\pi/4}$$

(θ = π/4 radianes = 45º):

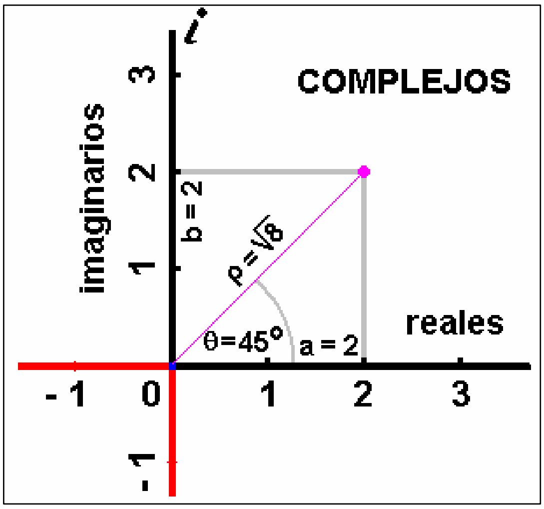


Figura 10: Representación gráfica de un número complejo en el plano

Operaciones con complejos

Números importantes en forma cartesiana y polar:

$0 = 0 + 0\,\boldsymbol{i} = 0\ e^{i\,0}$

$1 = 1 + 0\,\boldsymbol{i} = 1\ e^{i\,0} = e^{i\,0}$

$\boldsymbol{i} = 0 + 1\,\boldsymbol{i} = 1\ e^{i\,\pi/2} = e^{i\,\pi/2}$

$-1 = -\,1 + 0\ i = 1\ e^{i\,\pi} = e^{i\,\pi}$

$-\,\boldsymbol{i} = 0 - 1\,\boldsymbol{i} = 1\ e^{i\,3\,\pi/2} = e^{i\,3\pi/2}$

($\pi/2$ rad = 90^o ; π rad = 180^o ; $3\pi/2$ rad = 270^o)

La suma y resta se facilita con los números complejos en forma cartesiana:

$(a + b\,\boldsymbol{i}) + (c + d\,\boldsymbol{i}) = (a + c) + (b + d)\,\boldsymbol{i}$

$(a + b\,\boldsymbol{i}) - (c + d\,\boldsymbol{i}) = (a - c) + (b - d)\,\boldsymbol{i}$

El resto de las operaciones se facilita con los números complejos en forma polar:

$(\alpha\ e^{\boldsymbol{i}\,\theta}) \times (\beta\ e^{\boldsymbol{i}\,\varphi}) = (\alpha\times\beta)\ e^{\boldsymbol{i}\,(\theta+\varphi)}$

$(\alpha\ e^{\boldsymbol{i}\,\theta}) \div (\beta\ e^{\boldsymbol{i}\,\varphi}) = (\alpha\div\beta)\ e^{\boldsymbol{i}\,(\theta-\varphi)}$

$(\alpha\ e^{\boldsymbol{i}\,\theta})^n = (\alpha^n)\ e^{\boldsymbol{i}\,n\,\theta}$

$\sqrt[n]{\alpha\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\alpha}\ e^{i\,\theta/n}$

Como a θ se le puede sumar 2π , 4π , etc. la raíz enésima tiene n resultados diferentes:

$\sqrt[3]{-27} = -3 = 3\ e^{i\pi}$

$\sqrt[3]{-27} = 3\ (\ 1/2 + \sqrt{3}\ /2\ \boldsymbol{i}) = 3\ e^{i\pi/3}$

$\sqrt[3]{-27} = 3\ (\ 1/2 - \sqrt{3}\ /2\ \boldsymbol{i}) = 3\ e^{i\,5\,\pi/3}$

$\ln(\alpha\ e^{\boldsymbol{i}\,\theta}) = (\ln \alpha) + \boldsymbol{i}\,\pi$

$\ln(-\,4) = \ln(4\ e^{i\pi}) = (\ln 4) + \boldsymbol{i}\,\pi$

Se puede calcular la potencia (o raíz) de un complejo elevado a un complejo y el logaritmo de un complejo con una base compleja, pero la dificultad del cálculo escapa al propósito de esta charla.

La resolvente de la ecuación de segundo grado era conocida desde los tiempos de los babilonios, pero las raíces cuadradas de números negativos eran vistas como soluciones imposibles y eran descartadas. La ecuación cúbica reducida (sin el término de segundo orden) fue resuelta por Scipione del FERRO (italiano, 1465–1526) que la mantuvo en secreto (un puesto en la Universidad se ganaba con un desafío matemático, por lo tanto guardaba ese resultado como un as en la manga).

Todos veían como imposible a la $\sqrt{-1}$. Tartaglia, seudónimo de Niccoló FONTANA (italiano, 1499–1577) en 1535 redescubre esta solución y Gerolamo (o Girolano) CARDANO (italiano, 1571–1576) aprende la fórmula de Tartaglia bajo juramento de secreto. Más tarde, Cardano encuentra un libro escrito por del Ferro y se considera relevado del secreto y publica el método de resolución, dando crédito a del Ferro y Tartaglia, pero extendiendo la solución al caso general, hablando tanto de las soluciones reales como de las complejas a las que llama “sofisticadas”, pero obtiene raíces reales sumando el complejo conjugado.

Rafael BOMBELLI (italiano, 1526–1573) hizo manipulaciones de $\sqrt{-1}$ para obtener resultados es su libro de Álgebra y la calificó como ideas salvajes.

Euler le escribió en 1740 a su maestro, Johann BERNOULLI (suizo, 1667-1748), el resultado que ahora se conoce como fórmula de Euler:

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos\theta + \text{sen}\,\theta\,\sqrt{-1}$$

o bien

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

Este resultado había sido publicado por Roger COTES (inglés, 1682–1716) en 1714, pero en forma logarítmica. Lamentablemente la publicación de Cotes es tan oscura que fue muy dificil de entender.

Isaac NEWTON (inglés, 1643-1727) y Euler le atribuyen a Abraham De MOIVRE (francés, 1667–1754) el teorema

$$(\cos\theta + \sin\theta\,\sqrt{-1})^{1/m} = \cos(\theta/m) + \sin(\theta/m)\,\sqrt{-1}$$

pero De Moivre jamás lo publicó.

El teorema fundamental del álgebra dice que todo polinomio de una incógnita x, con coeficientes reales o complejos, igualado a cero, tiene por lo menos una raíz (real o compleja). La demostración del teorema fundamental del álgebra usando valores complejos fue esbozado por Jean d'ALEMBERT (francés, 1717–1783), y resuelto rigurosamente por Euler, Gauss, y otros. Como corolario de este teorema resulta que un polinomio de grado n de una variable igualado a cero tiene n raíces distintas o coincidentes.

Euler dijo en su *Algebra* (1770)

"Todas las expresiones tales como √(-1), √(-2), etc. son imposibles o números imaginarios, ya que ellas representan raíces de cantidades negativas, y de esos números podemos asegurar que ellos son ni siquiera nada, ni mayores ni menores que nada, lo que necesariamente constituyen lo imaginario o imposible"

Euler impuso la notación $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$ en 1777, y dio una prueba de que $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{6}$.

Caspar WESSEL (noruego, 1745–1818) inventó la interpretación geométrica de "x + *i* y" en el plano *x-y* en 1797. Su trabajo se mantuvo ignorado hasta 1895. Jean-Robert ARGAND (francés, 1768–1822) redescubrió en forma independiente la idea de Wessel en 1806.

Karl Freidrich GAUSS (alemán, 1777–1855) introdujo la expresión ***"número complejo"***. El probó el teorema fundamental del álgebra en 1849, extendido a polinomios complejos.

ℂ: conjunto cerrado

Con números complejos se pueden hacer las siete operaciones, y los resultados también son números complejos. Un número complejo elevado a un número complejo es también un complejo. La raíz compleja de un número complejo es un complejo. El logaritmo de un número complejo en base compleja también es un número complejo. De este modo podemos calcular como casos particulares raíces de números negativos, logaritmos de números negativos, etc.

El conjunto de los números complejos es cerrado a las siete operaciones elementales.

Los números complejos no admiten un orden. Dados A y B complejos, en general no puede hablarse de mayor, menor o igual: Los complejos se distribuyen en el plano y no sobre una recta. Se puede comparar una parte de un complejo con otra parte de un complejo, y podemos, por ejemplo, decir que la componente real de uno es mayor que la del otro. También podríamos comparar los módulos o los argumentos, pero no podemos dar un orden absoluto de mayor, menor o igual. Tampoco se pueden poner en correspondencia con los números naturales.

De la fórmula de Euler ($e^{i\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\,\text{sen}\,\theta$) para $\theta = \pi$ se deduce ($\cos\pi = -1$; $\text{sen}\,\pi = 0$):

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

fórmula por demás notable, ya que se han reunido los cinco números fundamentales de la aritmética en una sola ecuación.

Teorema final de la Aritmética

¿No será necesaria una nueva extensión del número?

Las sucesivas extensiones del número se hicieron para llegar a un conjunto cerrado para las siete operaciones elementales.

Las siete operaciones elementales obviamente son funciones cuyos resultados son cerrados en el campo de los números complejos. Pero existen infinitas funciones diferentes. Podría conjeturarse que haya funciones que tomen valores que se escapen del campo complejo. ¿Será necesaria una nueva extensión para cubrir propiedades que los números complejos en la definición actual no pueden abarcar?

La respuesta la dió Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (alemán, 1815–1897) que probó en 1863 que los números complejos son el **único** cuerpo conmutativo que se obtiene como extensión de los números reales. Un cuerpo conmutativo es una estructura algebraica que admite la suma y su inversa (o sea la resta), que admite la multiplicación y su inversa (o sea la división), que tanto la suma como el producto son conmutativas:

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

y que además respeta la propiedad distributiva

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Todas estas propiedades se mantienen con los números complejos, pero no se puede hacer ninguna extensión adicional sin que alguna o varias de estas propiedades se pierdan.

Agradecimientos

El autor desea agradecer la lectura crítica y los importantes comentarios de la Profesora Adriana Rabino y de la Profesora Ana María Bressan.

Bibliografía

Para consulta y ampliación de material se aconseja buscar a través de Internet en la extensa y muy bien documentada enciclopedia (el acceso es gratuito): **http://www.wikipedia.org**