EL TÉRMINO GENERAL DE SUCESIONES Y SERIES

Todo comienza en la UNIDAD. La UNIDAD se mira en el espejo esférico de sí misma, y se ve reflejada INFINITAS veces. Surge así la MULTIPLICIDAD como concepto. Tenemos ahora un conjunto de infinitas unidades: la SUCESIÓN CONSTANTE {1}

{1} = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1…}

Toda sucesión tiene asociada una serie, que es la sucesión que se obtiene con las sumas parciales de los términos de la sucesión original. Es decir, a toda SUCESIÓN se le puede asociar una SERIE definida de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Dada\ \ la\ sucesión\ \{a_n\} \\ Se\ define\ \{s_n\}\ \therefore\ \ s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$

Apliquemos esta idea a la sucesión constante {1}. Tenemos que

I_n : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, … 1 …

1 = 1

2 = 1+1

3 = 1+1+1

4 = 1+1+1+1

5 = 1+1+1+1+1

6 = 1+1+1+1+1+1

7 = 1+1+1+1+1+1+1

……………………………….

$$n = \sum_{k=1}^{n} 1$$

Es así como, al CONTAR (o numerar) UNIDADES, se obtiene la serie de los números naturales: los NÚMEROS PARA CONTAR.

Si a esta SERIE le añadimos el ORDEN NATURAL (ser mayor que) de los números enteros obtenemos, así, la SUCESIÓN -conjunto ordenado de números- de los números naturales.

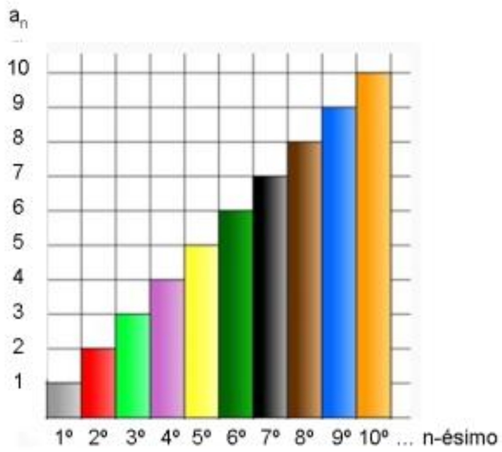
N : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ,15 16, 17 …. n ….

Dado que en la SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES el orden (la posición en la serie) y el ‘tamaño’ (el valor) de sus elementos coinciden, a esta sucesión le corresponde la siguiente TABLA:

n =	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º …
a_n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9 …

El PRIMERO es UNO; el segundo es dos; el tercero es tres; el cuarto, cuatro; el quinto, cinco; el sexto, seis; el séptimo, siete; el octavo, ocho; el noveno, nueve; el décimo, diez. ¿Sigo? ¿Te queda clara la diferencia entre ORDINALES y CARDINALES?

Tabla que se puede visualizar en la siguiente GRÁFICA:



De donde se deduce la siguiente FÓRMULA:

$$a_n = n$$

La SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES es la sucesión (no constante) más simple de todas. Una sucesión que sirve tanto para numerar (uno, dos, tres, cuatro…) como para ordenar (primero, segundo, tercero, cuarto…) otros conjuntos discretos. Esta sucesión de los números naturales se puede definir, también, por recurrencia: cada término es el anterior más uno. Así:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

Es una SUCESIÓN que, como queda dicho, solemos utilizar para numerar y ordenar otros conjuntos discretos, que convertimos, de esta manera, en sucesiones. Ya que una sucesión no es otra cosa que un conjunto ordenado de números. Esto es una SUCESIÓN:

n =	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º …
a_n =	1	1	2	3	5	8	13	21	34 …

¿Puedes encontrar la regla que permite generar esta sucesión? A esta regla se le llama TÉRMINO GENERAL, y en ocasiones se puede escribir como una FÓRMULA ALGEBRAICA. En otras ocasiones, como una REGLA DE RECURRENCIA. En este caso es más fácil hacerlo de la segunda manera, pero la primera ¡también existe!

El TÉRMINO GENERAL de la sucesión de los números naturales es $a_n=n$, por lo que la podemos escribir así: N = {n} Como todas, la SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES tiene una SERIE asociada, ésta:

I_n : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... n ...

1 = 1

3 = 1+2

6 = 1+2+3

10 = 1+2+3+4

15 = 1+2+3+4+5

21 = 1+2+3+4+5+6

28 = 1+2+3+4+5+6+7

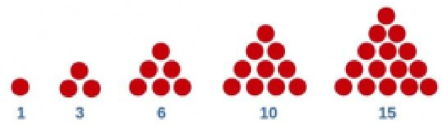
………………………………….

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se trata de la sucesión de los NÚMEROS TRIANGULARES, cuyo término general es

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Y sus cinco primeros términos los puedes visualizar así:



Esta FÓRMULA, el TÉRMINO GENERAL de la sucesión, te sirve para calcular cualquier término de la misma; sólo tienes que saber qué lugar (n) ocupa en la sucesión. Por ejemplo, el décimo número triangular es:

$$T_{10} = \frac{10\,(10+1)}{2} = 55$$

Es decir, la suma de los diez primeros números naturales es 55. Emula a Gauss calculando tú la suma de los cien primeros números naturales. Claro que Gauss, con nueve años, no conocía aún esta FÓRMULA. ¿Cómo lo hizo?

La sucesión de los NÚMEROS NATURALES tiene infinitos términos al carecer de último término. Dentro de esta sucesión podemos distinguir dos subsucesiones: la de los números pares, cuyo término general es $\{a_n = 2n\}$; y la de los números impares, cuyo término general es $\{a_n = 2n-1\}$. Ambas tienen los mismos términos que la sucesión de la que proceden: INFINITOS. Ésta es la paradoja del infinito: un conjunto y un subconjunto estricto pueden tener el mismo número de elementos. Si tomamos ahora la sucesión de los NÚMERO IMPARES podemos obtener su SERIE ASOCIADA. Es ésta:

I_n : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... 2n-1 ...

1 = 1

4 = 1+3

9 = 1+3+5

16 = 1+3+5+7

25 = 1+3+5+7+9

36 = 1+3+5+7+9+11

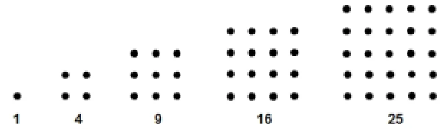
49 = 1+3+5+7+9+11+13

………………………………….

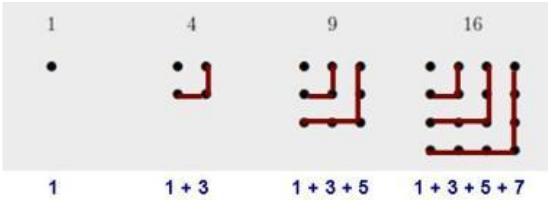
$$C_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Se trata de unos números muy especiales: la serie de los números CUADRADOS PERFECTOS,

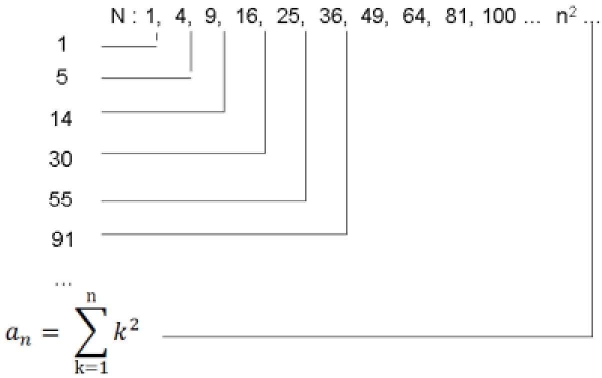
$$\{a_n = n^2\}$$



Todo esto está íntimamente relacionado con el CRECIMIENTO GNÓMICO, idea que también se puede aplicar a los números figurados. Ya que como se puede ver en esta imagen, el gnomon de un número cuadrado perfecto es SIEMPRE un número impar:



Si calculamos ahora la SERIE ASOCIADA a la sucesión de los números cuadrados perfectos tenemos que



Para el cálculo de su TERMINO GENERAL emplearemos la técnica de las DIFERENCIAS FINITAS. Tenemos que

$\{a_n\}$: 1, 5, 14, 30, 55, 91, ...

$\{d_1\}$: 4, 9, 16, 25, 36, ...

$\{d_2\}$: 5, 7, 9, 11, ...

$\{d_3\}$: 2, 2, 2, ...

Vemos que las diferencias terceras ($d_{3)}$ constantes, esto implica que el término general es un polinomio de grado tres:

$$\mathbf{a_n = a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + d}$$

Para calcular los coefiecientes *a, b, c* y *d*, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_1 = 1; \qquad 1 = a + b + c + d \qquad (1)$$

$$a_2 = 5; \qquad 5 = 8a + 4b + 2c + d \qquad (2)$$

$$a_3 = 14; \qquad 14 = 27a + 9b + 3c + d \qquad (3)$$

$$a_4 = 30; \qquad 30 = 64a + 16b + 4c + d \qquad (4)$$

restando (2) – (1), (3) – (2), (4) – (3) tenemos que

$$4 = \ 7a + 3b + c \qquad (5)$$

$$9 = 19a + 5b + c \qquad (6)$$

$$16 = 37a + 7b + c \qquad (7)$$

volviendo a restar (6) – (5) y (7) – (6)

$$5 = 12a + 2b \qquad (8)$$

$$7 = 18a + 2b \qquad (9)$$

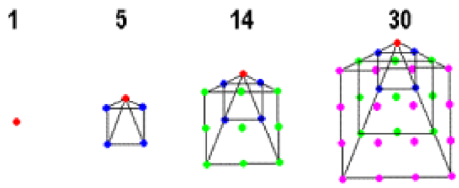
Restando estas dos últimas ecuaciones obtenemos que

$$2 = 6a \ => a = \frac{1}{3}$$

sustituyendo en (8) obtenemos que b = 1/2. Siguiendo así llegamos a c= 1/6 y d=0. Por lo que tenemos que:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\, n^3 + \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{6}\, n$$

que es el término general de los NÚMEROS PIRAMIDALES cuadrados



Como ves en la figura de arriba, un número piramidal de base cuadrada es un número figurado que se obtiene al apilar esferas (o puntitos) iguales formando capas en forma de cuadrados (perfectos) consecutivos.

Factorizando la expresión anterior, el TÉRMINO GENERAL de la sucesión de los números PIRAMIDALES CUADRADOS toma la siguiente forma

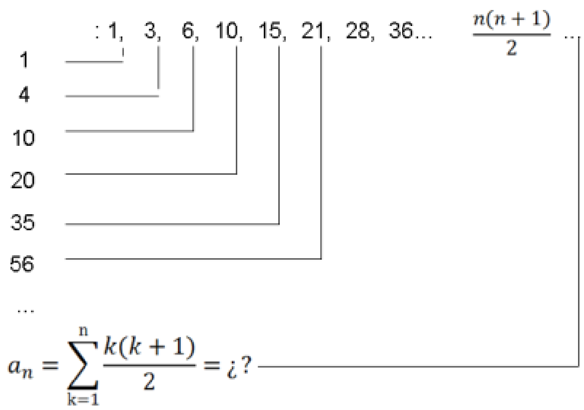
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}$$

Los primeros números piramidales cuadrados son: 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819 … Su término general también se pueden escribir utilizando números combinatorios

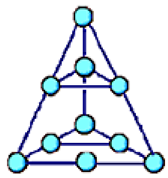
$$\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

Fue G. N. Watson quien en 1918 demostró que sólo hay un número piramidal cuadrado que es, a su vez, un cuadrado perfecto, además del 1.

¿Podrías obtener tú, como ejercicio, la serie asociada a la sucesión de los números triangulares? [VER SOLUCIÓN]



¿De qué SERIE estamos hablando? Antes de hacer cálculos, intenta visualizar con números figurados lo que estás haciendo. ¿Puedes adelantar el resultado? Aquí tienes una solución:
Tomemos, por ejemplo, los números triangulares, 1, 3, 6, 10,… Imaginemos que comenzamos por 1 (siempre se comienza con él), que hará el papel de vértice (de GERMEN), y después le adosamos como base el siguiente triangular, 3 (primer gnomon), y después el siguiente, 6 (segundo gnomon), y así hasta que obtengamos la 'altura' deseada (n). Lo puedes ver en la imagen (un tetragonal de 'altura' 3):



A los NÚMEROS PIRAMIDALES de base triangular (k=3) les llamaremos tetraédricos, a los de orden 4 (k=4), piramidales cuadrados, y al resto, pentagonales, hexagonales, y así hasta el *orden* que deseemos. Usamos la palabra orden (k) para no crear confusión. Llamaremos *altura* al número de 'capas' poligonales que se acumulan.

Evidentemente, el crecimiento GNÓMICO (crecimiento por capas) te dice que:

PIR(n,k)=PIR(n-1,k)+POL(n,k)

El número piramidal de orden k y altura n equivale a la suma del piramidal de idéntico orden y uno menos de altura y el poligonal de mismo orden y lado (la capa añadida)
Existe una expresión general para calcular PIR(N,K) (Piramidal de orden K -la forma de la base- y de lado n -la altura-)

$$PIR(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

Tienes una demostración [AQUÍ]   [VER esto también]

Con un poco de Álgebra, se puede extraer (¿puedes?) de esta fórmula el factor n(n+1)/2, que es, precisamente, el número triangular del mismo lado que el piramidal que estamos calculando. La fórmula quedaría entonces así:

$$PIR(n,k) = T_n \frac{n(r-2) - (r-5)}{3}$$

¿Qué traducción tiene esta nueva expresión?