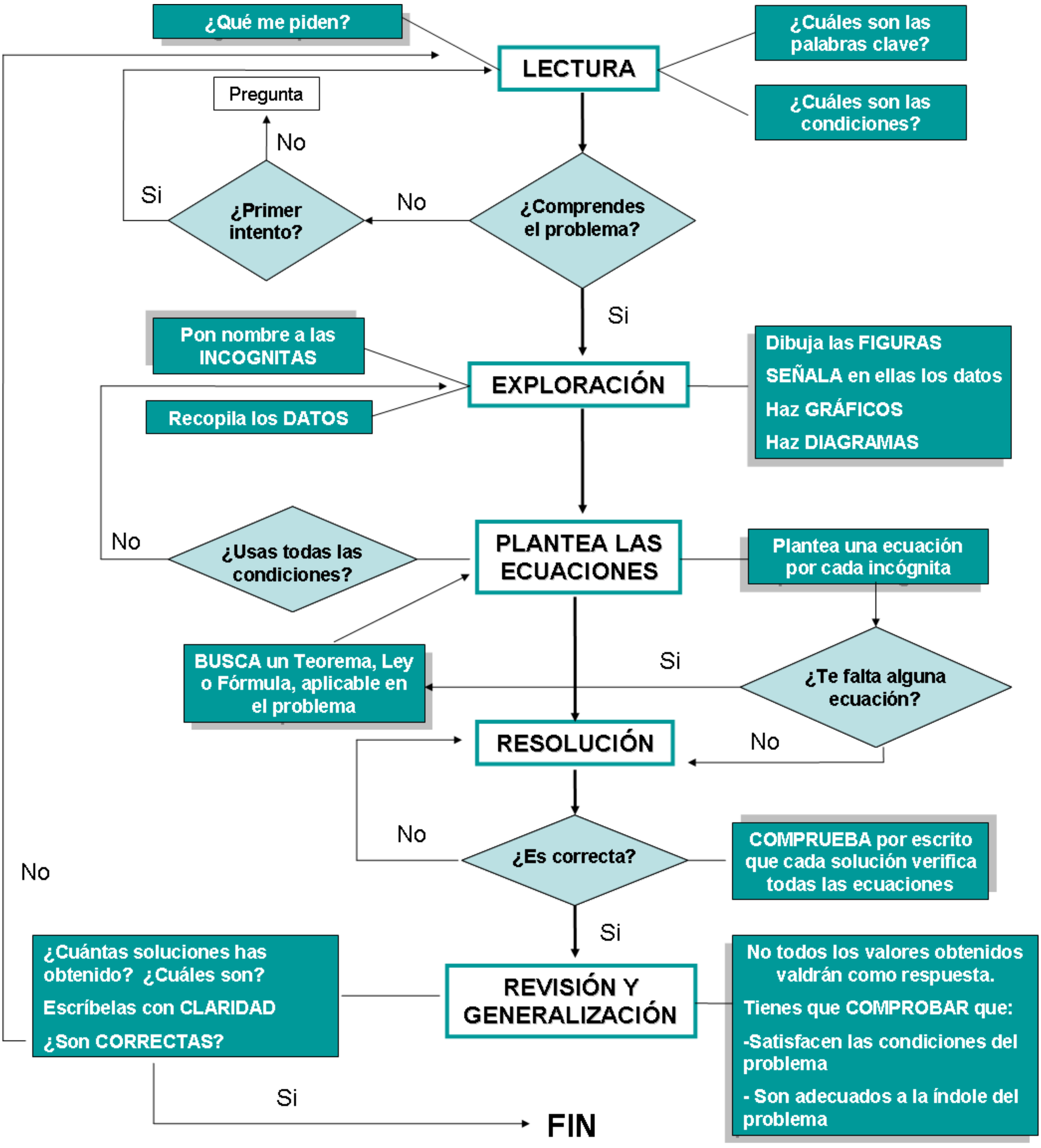
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR MÉTODOS ALGEBRAICOS (3ESO)

Como toda TÉCNICA, la resolución de problemas por métodos algebraicos, puede aplicarse de una manera bastante rutinaria. Todo se reduce a seguir, con solvencia, el siguiente PROTOCOLO



CONSEJOS para la correcta aplicación del PROTOCOLO

- Lee cuidadosamente el enunciado hasta que lo comprendas y sepas explicarlo con tus palabras.
- Identifica los datos desconocidos, o incógnitas, y asígnales unas letras: a cantidades distintas, letras distintas. Nómbralas con mucha claridad.

- DIBUJA cualquier figura que intervenga, y DESTACA en ella los DATOS y las ICÓGNITAS.
- Plantea una ecuación por cada una de las incógnitas. Si no, el problema será INDETERMINADO: tendrá infinitas soluciones. Puede que al transformar el enunciado en ecuaciones, te falte alguna, entonces tienes que tener en cuenta los Teoremas; Leyes o Principios que sean aplicables en ese problema. Un ejemplo típico, es que se pueda utilizar el Teorema de Tales o el Pitágoras.
- Resuelve la ecuación o el sistema de ecuaciones. Recuerda que puede ser DETERMINADO (un número finito de soluciones), INDETRMINADO (un número infinito de soluciones), o IMPOSIBLE (no tiene solución)
- Comprueba que las soluciones de la ecuación o el sistema de ecuaciones, es la solución del problema. Puede que, por la índole del problema alguna solución no valga. Por ejemplo, si te piden determinar las dimensiones de un cuerpo, o la duración de un evento, no puedes dejar soluciones negativas. ¡No tienen sentido!
- No te olvides de ninguna solución, puede que haya varias. Señálalas con precisión y claridad. Si puedes, GENERALIZA el resultado. Muchos problemas admiten generalizaciones.

EJEMPLOS de cómo se aplica el PROTOCOLO

Halla un número de dos cifras sabiendo que su valor es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras, y que si se invierte el orden de dichas cifras, el valor del número aumenta en 36 unidades.

Lectura:

¿Entiende el significado de las expresiones: "valor de un numero de dos cifras", "invertir el orden de las cifras"…?

Mira, no te resistas, tienes que aprender bien el significado de cada concepto. ¡Eso es cultivarse o culturizarse! No es lo mismo NÚMERO que CIFRA, aunque much@s lo confundan. Sólo hay diez cifras: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], como los dedos de las dos manos. Pero hay infinitos NUMEROS NATURALES: sí, esos que sirven para CONTAR, ORDENAR y CODIFICAR elementos de conjuntos discretos. ¡Mucho lenguaje técnico! ¿Y qué esperabas? El rigor y la precisión lo exigen, no el capricho.

Los infinitos NÚMEROS se escriben con las diez cifras. ¡Qué milagro! Hay nueve números de una cifra, noventa de dos cifras, novecientos de tres cifras… ¿O no? Y este milagro de escribir infinitos números con sólo diez cifras lo logra el SISTEMA DE NUEMRACIÓN POSICIONAL: la posición que ocupa cada cifra dentro del número determina su valor.

Exploración:

- **¿Qué me piden?** Determinar un número de dos cifras.
- **Nombro las incógnitas.** Me dirás que sólo hay una. Sí, tienes razón, pero no puedo determinar un número de varias cifras si no las conozco todas. Así que no, en este caso las incógnitas son las cifras del número: DOS.

  Sea x = la cifra de las decenas
  E y = la cifra de las unidades
  Entonces, el número pedido es $10x + y$

  ¿Te ha gustado la jugada? Pues te aseguro que es de las buenas. Si no eres capaz de cosas como esta, meterás pocos goles.

Planteo las ecuaciones: hay dos incógnitas, tengo que plantear dos ecuaciones.

¿Cómo? ¿De dónde? De las condiciones del problema. ¿Cuáles son? Éstas:

"el valor del número es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras"

"el valor del número invertido es igual al valor del número más 36"

¿Entiendes bien que es invertir las cifras de un número? Claro, si nos dan el 37, al invertir sus cifras tenemos el 73. Aumenta mucho su valor.

Ahora traduce cada expresión de las condiciones al lenguaje algebraico. Así:

- "el valor del número es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras"

  10x + y = 4 . (x +y)

- el valor del número invertido es igual al valor del número más 36"

  10y + x = (10x + y) + 36

Resuelvo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} 10x + y = 4\,(x+y) \\ 10y + x = (10x + y) + 36 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 10x - 4x = 4y - y \\ 10y - y = 10x - x + 36 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 6x = 3y \\ 9y = 9x + 36 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 2x = y \\ y = x + 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y = 2x \\ 2x = x + 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y = 2x \\ x = 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 8 \end{matrix}$$

Compruebo la solución en cada ecuación:

$$\begin{matrix} \mathbf{10 \cdot 4 + 8 = 4\,(4 + 8)} \\ \mathbf{10 \cdot 8 + 4 = (10 \cdot 4 + 8) + 36} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbf{48 = 48} \\ \mathbf{84 = 84} \end{matrix}$$

Escribo la solución con claridad:
La cifra de las decenas es 4
La cifra de las unidades es 8
El número buscado es el 48

Comprobación:

- "el valor del número es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras"

  48 = 4 . (4 + 8)

- el valor del número invertido es igual al valor del número más 36"

  84 = 48 + 36

¿Tiene sentido la solución obtenida? Todo el sentido del mundo: las dos cifras son positivas. Y la solución obtenida, cumple las condiciones que impone el enunciado.

Se puede GENERALIZAR le problema. Sí, cuando te hablen de un número con un determinado número de cifras, PROCEDE siempre de esta manera.

Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que la altura es 4/23 del perímetro, y que la diagonal mide 68 cm.

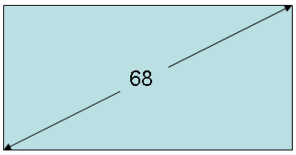
Lectura:

¿Entiende el significado de las expresiones: “dimensiones de un réctangulo”, “perímetro, diagonal, del rectángulo”, “ es 4/23 de”…?

Te lo repito: tienes que aprender bien el significado de cada TÉRMINO MATEMÁTICO. Porque muchos términos matemáticos son específicos del lenguaje matemático. Si no los aprendes como todo el mundo, no nos entenderemos jamás.

Exploración:

- **DIJUJA un rectángulo y destaca los datos:**

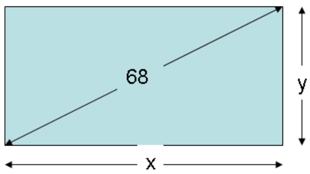


- **¿Qué me piden?** Las dimensiones del rectángulo: las longitudes de la base y de la altura del rectángulo.

- **Nombro las incógnitas.**

Sea *x* = la longitud de la base
E *y* = la longitud de la altura

- Completo la figura añadiendo las incógnitas



Planteo las ecuaciones: hay dos incógnitas, tengo que plantear dos ecuaciones.

¿Cómo? ¿De dónde? De las condiciones del problema. ¿Cuáles son? Ésta:

“la altura del rectángulo es igual a 4/23 del perímetro”

Ahora traduce la expresión de la condición al lenguaje algebraico. Así:

- “la altura del rectángulo es igual a 4/23 del perímetro”

$$y = 4/23 \, . \, (x + y + x + y)$$

Me falta una ecuación, porque ha dos incógnitas. Y no hay más condiciones en el problema. ¿Qué pasa? ¿Qué hago? Mira a ver si hay un Teorema, una Ley, un Principio aplicable en este problema. ¿Lo hay? Claro que sí, es aplicable el Teorema de Pitágoras. Ahí tiene la segunda ecuación:

$$x^2 + y^2 = 68^2$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} y = \frac{4}{23}\,(2x+2y) \\ x^2 + y^2 = 68^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 23\,y = 8x+8y \\ x^2 + y^2 = 68^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 15y = 8x \\ x^2 + y^2 = 68^2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{15}{8}y \\ x^2 + y^2 = 68^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{15}{8}y \\ \left(\frac{15}{8}y\right)^2 + y^2 = 68^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{15}{8}y \\ 15^2y^2 + 8^2y^2 = 8^2 68^2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{15}{8}y \\ (15^2+8^2)y^2 = (8\cdot 68)^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{15}{8}y \\ y^2 = \frac{(8\cdot 68)^2}{(15^2+8^2)} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = \frac{15}{8}y \\ y = \frac{8\cdot 68}{\pm\sqrt{(15^2+8^2)}} = \pm 32 \end{array}$$

Luego he obtenido dos soluciones:

$$\begin{array}{ccc} x = 60\ cm & e & y = 32\ cm \\ x = -60\ cm & e & y = -32\ cm \end{array}$$

Compruebo la solución en cada ecuación:

$$\begin{array}{c} \mathbf{32 = \frac{4}{23}\,(2\cdot 60 + 2\cdot 32)} \\ \mathbf{60^2 + 32^2 = 68^2} \end{array} \text{ ¡Bien! } \mathbf{y} \quad \begin{array}{c} \mathbf{(-32) = -\frac{4}{23}\,(2\cdot 60 + 2\cdot 32)} \\ \mathbf{(-60)^2 + (-32)^2 = (-68)^2} \end{array} \text{ ¡Bien, también!}$$

¿Tiene sentido la solución obtenida? La segunda solución no tiene sentido. Las CANTIDADES DE LONGITUD son siempre positivas. ¿Cierto?

Y la solución obtenida, cumple las condiciones que impone el enunciado.

- 32 (la altura) es los 3/23 de 184 (el perímetro)
- Y (32, 60, 68), es una TERNA PITAGÓRICA. Anda, busca lo que eso significa.

Se puede **GENERALIZAR** el problema. Sí, el Teorema de Tales y el teorema de Pitágoras, son las dos joyas de la GEOMETRÍA. Mediante su aplicación se pueden resolver multitud de problemas.

¿A quién se le ocurren estas cosas, estos problemas? Pues a los maestros, de todas las civilizaciones, de todos los tiempos. Porque están pensados para ejercitar una determinada TÉCNICA, por eso más que problemas, son EJERCICIOS. Ejercicios que se resuelven todos de la misma forma: mediante la TECNICA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR MÉTODOS ALGEBRAICOS. Nombrando incógnitas y planteando ecuaciones, para que me entiendas. ¡Y no hay más! Te entrenas hasta que dominas la TÉCNICA y, sólo entonces, quedas preparado para mayores retos.

Además, has aprendido la importancia de servirte de PROTOCOLOS. Son como tacatás, los usas para aprender a andar cuando apenas te sostienes en pie, y luego los cambias por rutinas inconscientes. ¿Acaso eres consciente de lo que tienes que hacer para caminar? ¡Y hasta corres! A veces tanto, que te la pegas. Pero de eso se trata, de volver a ponerse en pie, y seguir haciendo camino. Porque al andar se hace camino, y cuando echas la vista atrás, ves la senda que nunca volverás a pasar. Disfruta de lo que haces, si no disfrutas, normalmente es que no estás entendiendo para qué lo haces.

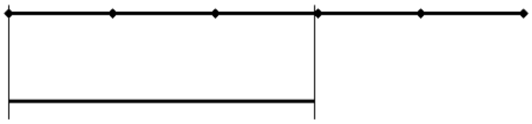
A veces, y en el contexto de resolución de problemas por métodos algebraicos, te proponen problemas como éste:

> En la primera prueba de unas oposiciones, fueron eliminados los 2/5 del total de aspirantes, en la segunda prueba fueron eliminados los 4/7 de los que aún quedaba, en la tercera y última fueron eliminados los 2/3 de los que restaban. Si aprobaron 60 opositores, ¿cuántos fueron eliminados en total?

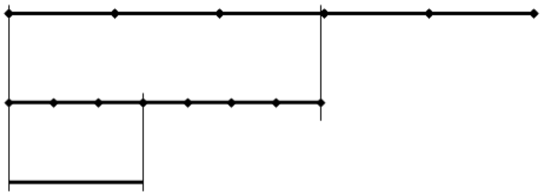
Claro que se puede resolver por métodos algebraicos, pero hay una alternativa poco conocida que es mucho más simple, y sobre todo, MÁS ELEGANTE. Aquí la TÉCNICA se conoce como IR DE ATRÁS HACIA DELANTE. Y exige codificar las cantidades como longitudes de segmentos de línea recta. Que sí, que es fácil de entender: cambias la x por un segmento de línea recta. Así:

¿Cuántos opositores se presentan a la oposición? Éstos, ni uno más, ni uno menos.

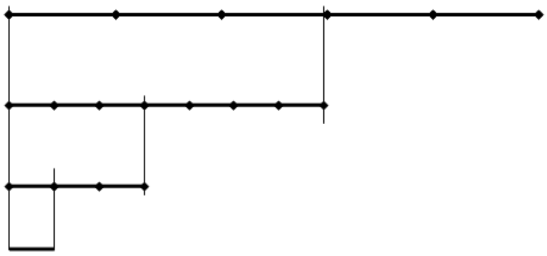
Y empiezas a hacer lo que te dicen. Eliminas los 2/5. Así



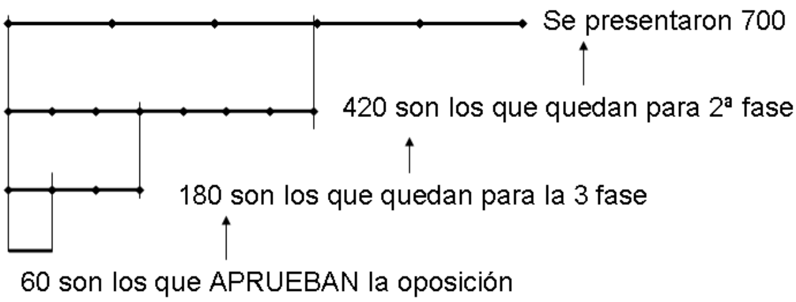
Ahora eliminas los 4/7 de los que quedan. Así:



Y por último, los dos tercios de los que restan. Así:



Y ahora vete de ATRÁS PARA ADELANTE. Así:



¿Lo entiendes? Estás operando con FRACCIONES, calcula un trocito y multiplica por el número de trocitos iguales. Esto es lo que significa OPERAR CON FRACCIONES. Te preguntan cuántos fueron eliminados en total. ¿Te animas a dar la respuesta correcta?

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 24 cm y la hipotenusa supera en 18 cm al otro cateto. Busca el perímetro y el área del triángulo.
2. Si un vendedor descuenta el 20% sobre el precio de venta de un artículo, gana 18,48 € sobre el precio de coste; pero si descuenta el 50%, pierde 4,50 €. ¿Qué porcentaje aplica al precio de coste, en este artículo, para calcular el precio de venta sin descuentos?
3. Tres segmentos miden, respectivamente, 8, 22 y 24 cm. Si a los tres les añadimos una misma longitud, el triángulo construido con ellos es rectángulo. Halla dicha longitud
4. Las dos cifras de un número suman 12. Si al cuadrado de dicho número se le suma 48, se obtiene un tercio del cuadrado del número que resulta al invertir el orden de las cifras del primero. ¿Cuál es ese número?
5. En un triángulo rectángulo, la proyección de un cateto sobre la hipotenusa es 54 cm y la suma de la altura, referente a la hipotenusa, con la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa es 60 cm. Calcula dicha proyección.
6. Varios amigos toman unas raciones en una terraza y deben pagar 112 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 1 € cada uno. ¿Cuántos amigos son?
7. Busca dos números, sabiendo que dividiendo el mayor por el menor, obtenemos 3 de cociente y 4 de resto, mientras que la razón entre los dos después de aumentarlos en 9 unidades es 2.
8. Halla un número de dos cifras tal que si lo dividimos por la suma de los absolutos de sus cifras, obtenemos 4 de cociente y resto 3, mientras que la diferencia entre el duplo de dicho número y el número obtenido invirtiendo las cifras es 20.
9. Halla una fracción equivalente a 5/7, cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1184.
10. Descompón el número 365 en dos sumandos, de tal modo que sean los cuadrados de dos números enteros consecutivos.
11. Halla dos números tales cuya suma, producto y cociente sean iguales entre sí.
12. La suma de los radios de dos círculos es 70 cm y la suma de las áreas de éstos es igual al área de un tercer círculo de 50 cm de radio. ¿Cuál es el radio de los dos primeros círculos?
13. El área de un triángulo rectángulo es 120 dm^2, y la hipotenusa mide 26 dm. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?
14. Calcula los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm, sabiendo que uno de los catetos es la semisuma de la hipotenusa y del otro cateto.
15. Halla los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que el lado menor tiene 23 cm menos que el mediano y éste 2 cm menos que el mayor.
16. Determina las dimensiones de un rectángulo cuya superficie es 8 m^2 y la diagonal mide 2.5 m
17. La suma de las edades de un padre y sus dos hijos son 73 años. Dentro de 10 años la edad del padre será el duplo de la edad del hijo menor. Hace 12 años la edad del hijo mayor era el doble de la edad de su hermano. Hallar la edad de cada uno.