CLASIFICANDO LAS FUNCIONES ELEMENTALES

CLASIFICAR es un PROCEDIMIENTO MATEMATICO de enorme valor. Consiste en ordenar o dividir un conjunto de entes matemáticos homogéneos (que pertenecen al mismo tipo) en **CLASES** a partir de un criterio determinado. Una primera clasificación de las funciones elementales establece dos CLASES: **las FUNCIONES ALGEBRAICAS y las FUNCIONES TRASCENDENTES**.

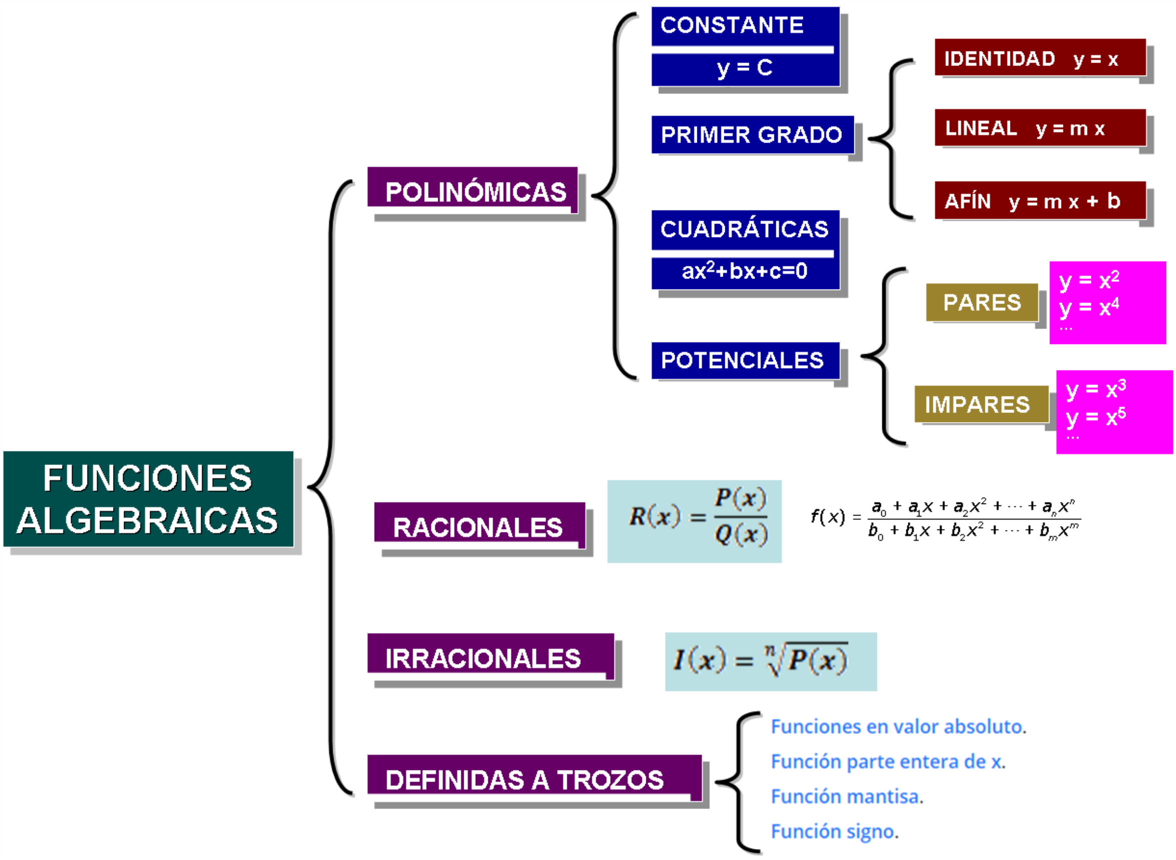
- En las **funciones algebraicas** las operaciones que se pueden efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

- En las **funciones trascendentes** la variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

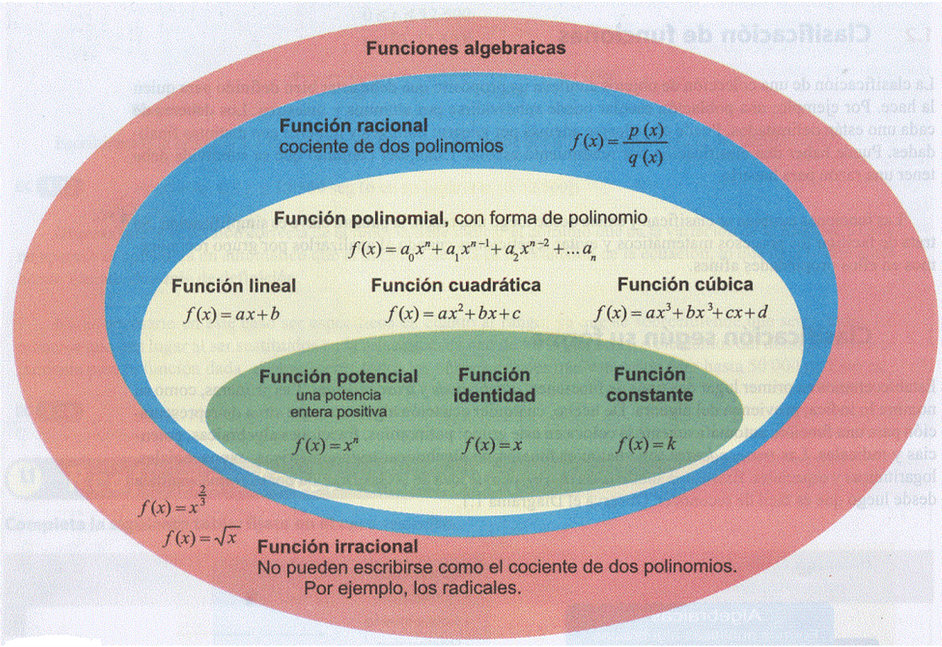
I. LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS (elementales)

- **Funciones explícitas: En las** funciones explícitas **se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución.** Ejemplo: $f(x) = 5x - 2$
- **Funciones implícitas**: **En las** funciones implícitas **no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones**: $5x - y - 2 = 0$

Una CLASIFICACIÓN de las FUNCIONES ALGEBRAICAS EXPLÍCITAS sería:

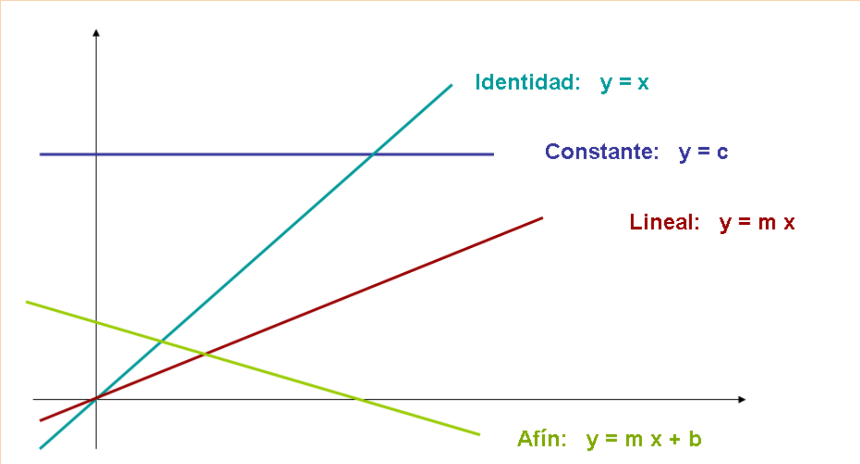


O bien:

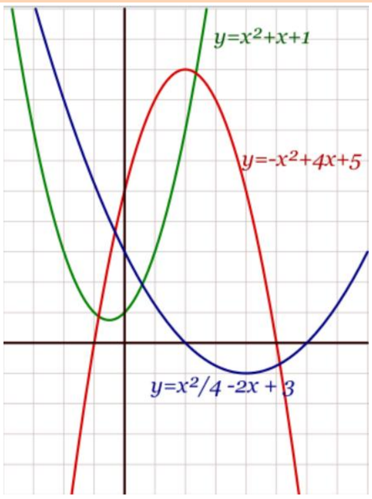


GRÁFICAS:

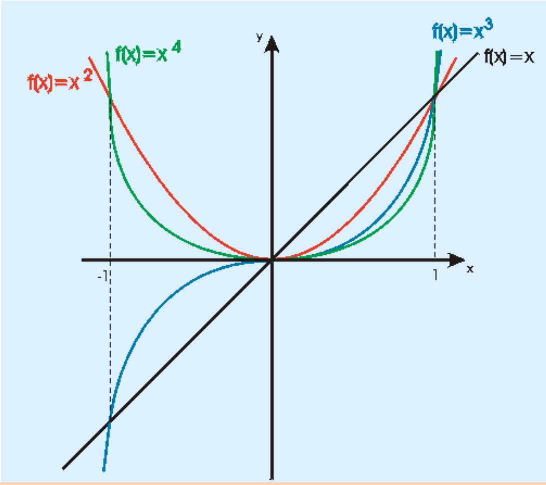
- **Constante, Identidad, Lineal y Afín**



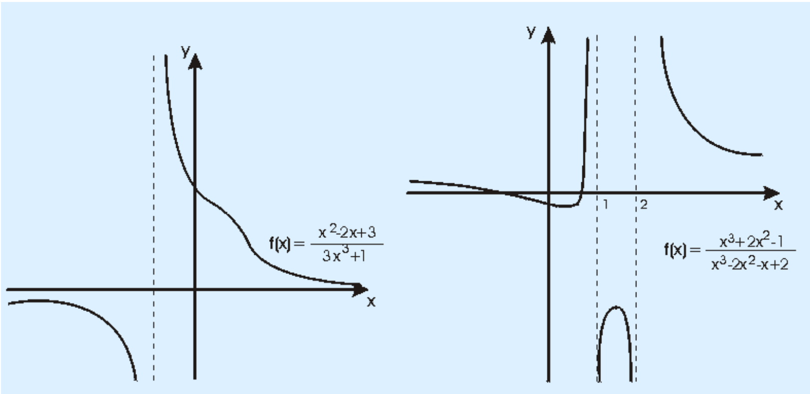
- **Cuadrática**



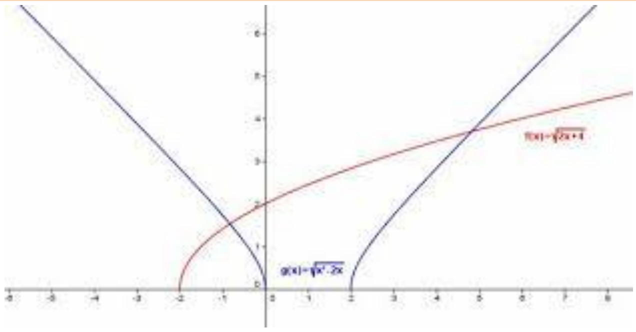
- **Potenciales**



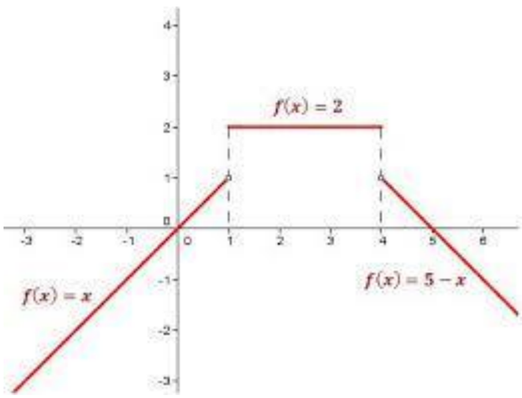
- **Racionales**



- **Irracionales**



- **Definidas a trozos**



II. LAS FUNCIONES TRASCENDENTES (elementales)

- **Funciones explícitas: En las** funciones explícitas **se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución.** Ejemplo: f(x) = sen x
- **Funciones implícitas**: **En las** funciones implícitas **no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones**: $y^2 - \text{sen } x = 0$

Una CLASIFICACIÓN de las FUNCIONES TRASCENDENTES EXPLÍCITAS sería:

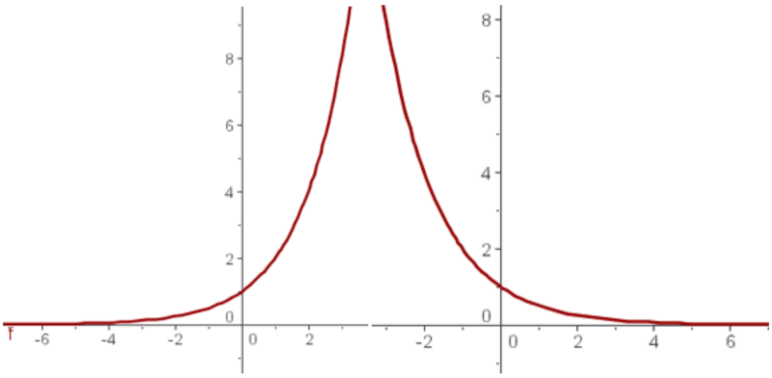
Funciones exponenciales

$f(x) = a^x$

$\boldsymbol{Dom} = (-\infty, +\infty) \qquad \boldsymbol{Rec} = (\mathbf{0}, +\infty)$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama *función exponencial de base a y exponente x*.

a > 1 **0 <a < 1**



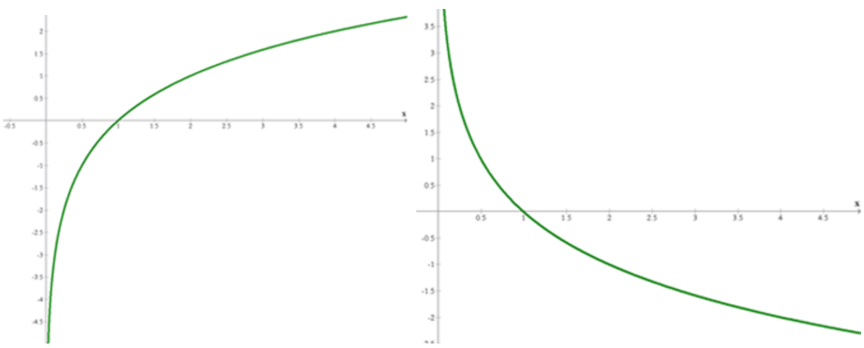
Funciones logarítmicas

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

$f(x) = \log_a x$

$a > 0, \quad a \neq 1$

a > 1 **0 < a < 1**



Funciones trigonométricas

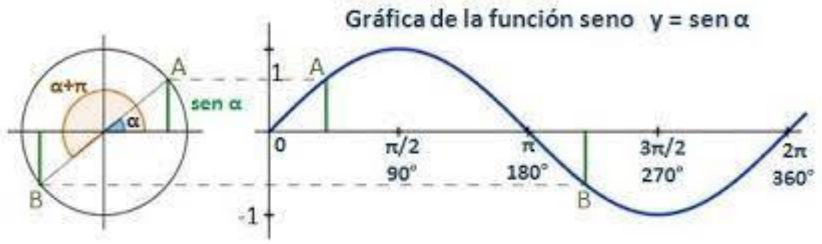
La **funciones trigonométricas** asocian a cada número real, x, el valor de la razón trigonométrica del ángulo cuya medida en radianes es x.

Función seno

f(x) = sen x

$\boldsymbol{Dom} = (-\infty, +\infty)$

$\boldsymbol{Rec} = [-\mathbf{1}, +\mathbf{1}]$

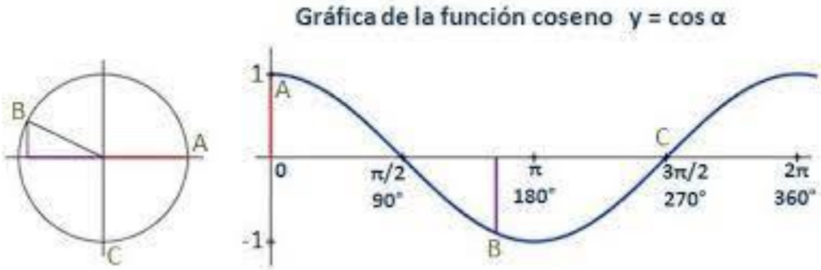


Función coseno

f(x) = cos x = sen (x + π/2)

$\boldsymbol{Dom} = (-\infty, +\infty)$

$\boldsymbol{Rec} = [-\mathbf{1}, +\mathbf{1}]$



Función tangente

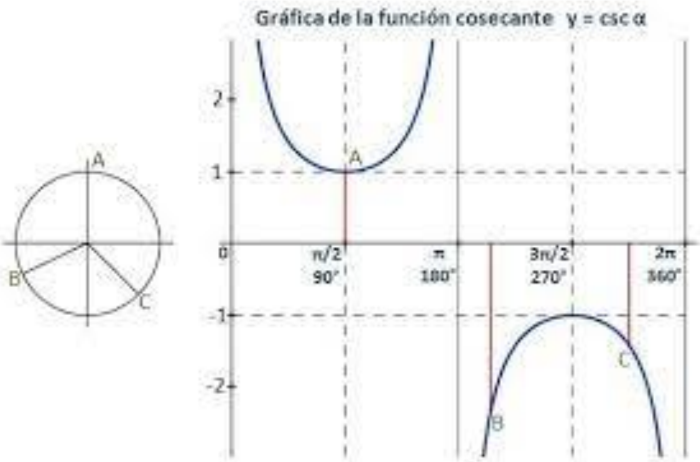
f(x) = tg x = sen x / cos x

$\boldsymbol{Dom} = (-\infty, +\infty) \ddots \{(\mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1})\boldsymbol{\pi}/\mathbf{2}\}$

$\boldsymbol{Rec} = (-\infty, +\infty)$

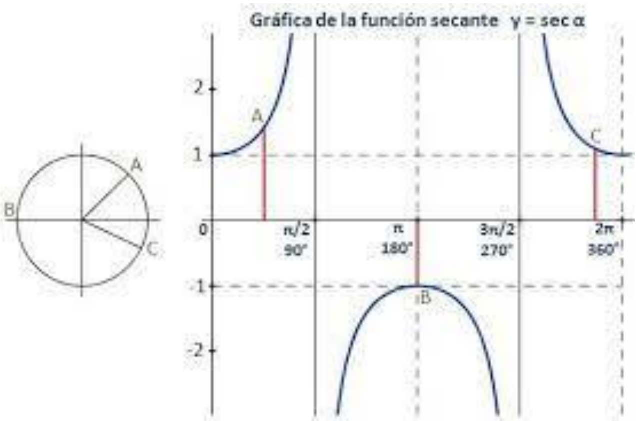
Función cosecante

f(x) = cosec x = 1 / sen x



Función secante

f(x) = sec x = 1 / cos x = cosec (x+ π/2)



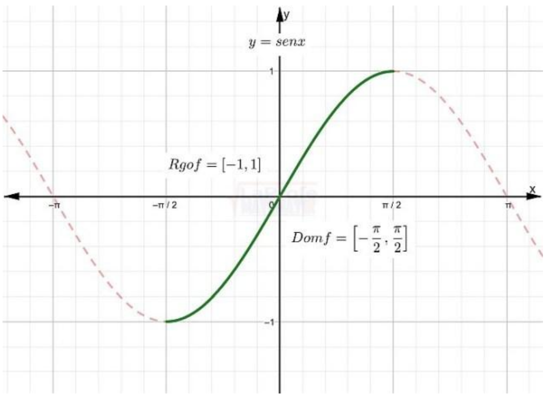
Función cotangente

f(x) = cotg x = 1 / tg x

Funciones trigonométricas inversas

Función seno inverso o arcoseno

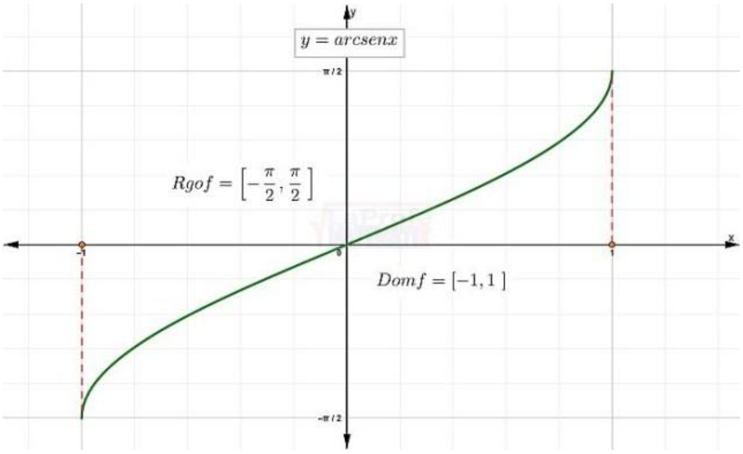
Para que la función del seno permita inversa se debe restringir su dominio en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ por lo tanto su rango se limita al intervalo [-1,1] es aquí donde la función seno es biyectiva, y por lo tanto, admite una función inversa llamada arcoseno. Ver la imagen de la gráfica de la función seno con la restricción.



Entonces se puede afirmar que:

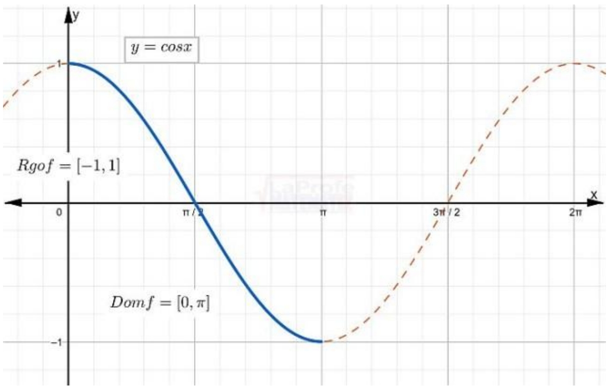
$$y = sen^{-1}x \text{ sí y sólo si } \quad x = sen(y) \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Gráfica de la función arcoseno



Función coseno inverso o arcocoseno

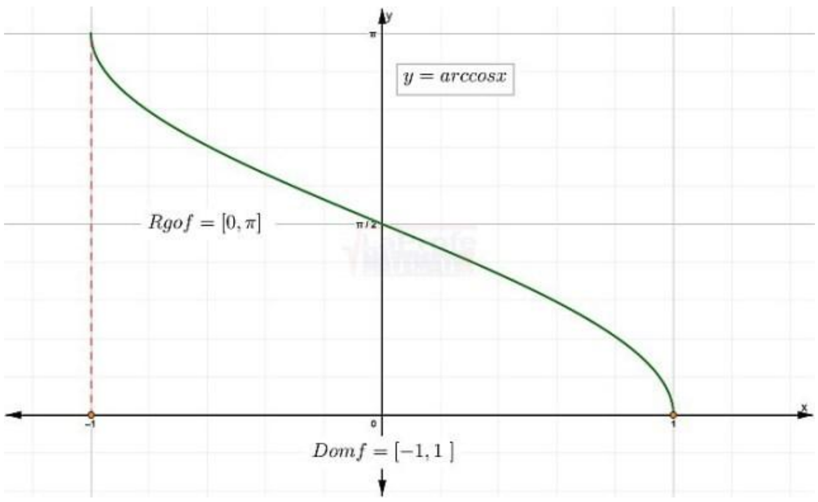
Para que la función del coseno tenga inversa se debe restringir el dominio en el intervalo $[0, \pi]$ la cual le corresponde un rango como [-1,1], y el nombre de esta función inversa del coseno es llamada arcocoseno. Ver la gráfica de la función coseno con restricción en el dominio.



La función arcocoseno queda definida como:

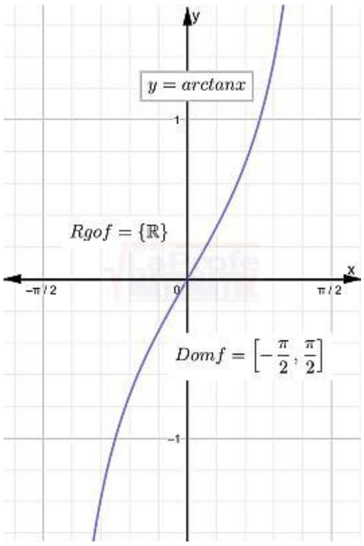
$y = cos^{-1}x$ sí y sólo si $x = cosy$ y $[0, \pi]$

Gráfica de la función arcocoseno



Función tangente inverso o arcotangente

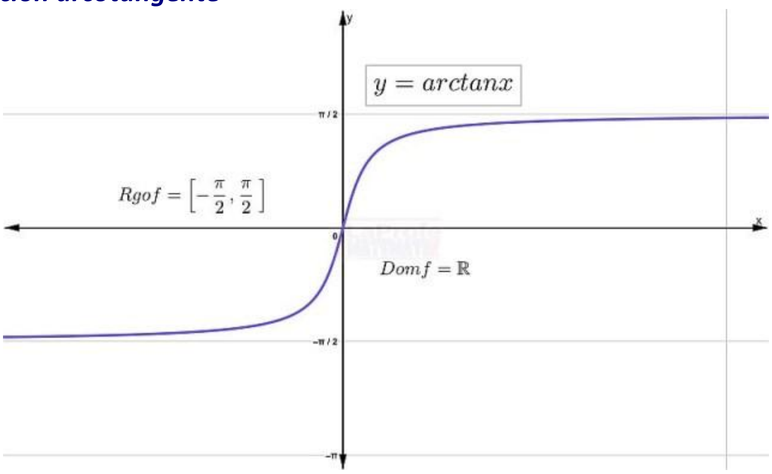
Para definir la función tangente inversa, se debe restringir el dominio de la función tangente al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y su rango quedaría como el conjunto de los números reales Rgo $\mathbb{R}$. Observe la gráfica de la función tangente con restricción en el dominio.



La función arcotangente finalmente queda definida como:

$y = tan^{-1}x$ sí y sólo si $x = tany$ y $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Gráfica de la función arcotangente



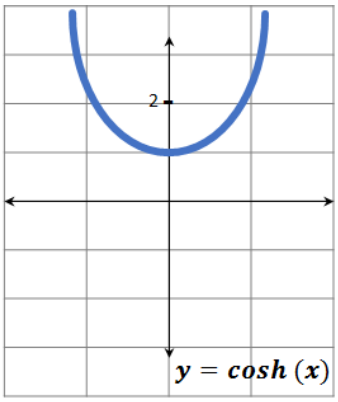
Funciones hiperbólicas

Las **funciones hiperbólicas** se definen a través de expresiones algebraicas que incluyen funciones exponenciales e^x y su función inversa e^{-x}, donde e es la constante de Euler (o como se le conoce comúnmente “número e”), cuyo valor aproximado es 2,718281. Las funciones hiperbólicas básicas son **seno hiperbólico** (sinh) y el **coseno hiperbólico** (cosh), de éstos se derivan la función de **tangente hiperbólica** (tanh). Las otras funciones: cotangente (coth), secante (sech) y cosecante (csch), son las inversas de las tres anteriores respectivamente.

Coseno hiperbólico

Cosh (x) = $(e^x + e^{-x}) / 2$

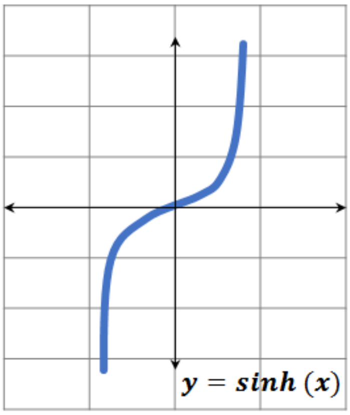
Es una función par.



Seno hiperbólico

senh (x) = $(e^x - e^{-x}) / 2$

Es una función impar.

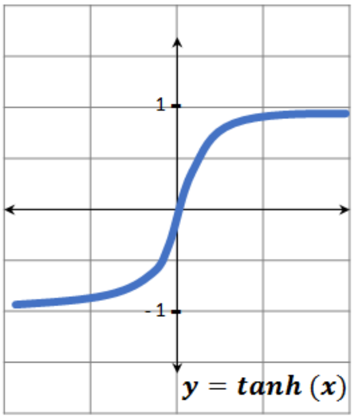


Tangente hiperbólica

Tanh (x) = senh (x) / cosh (x) = $(e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$ =

Tanh (x) = $(e^{2x} - 1) / (e^{2x} + 1)$

Es una función impar.



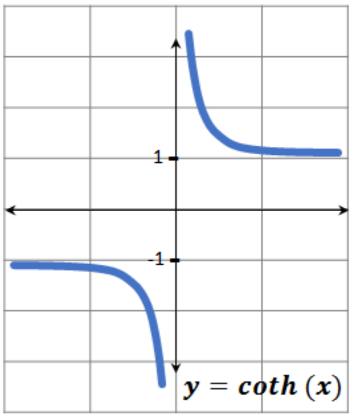
Cotangente hiperbólica

Coth (x) = cosh (x) / senh (x) = $(e^x + e^{-x}) / (e^x - e^{-x})$

coth (x)= $(e^{2x} + 1) / (e^{2x} - 1)$

Definida sobre R* y más generalmente

sobre C*; es una función impar.



Las funciones sinh y cosh satisfacen la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

Suponiendo que x = cosh (t) e y = sinh (t) y considerando que:

cosh (t) = $(e^t + e^{-t}) / 2$ y senh (t) = $(e^t - e^{-t}) / 2$

Sustituimos en la ecuación de la hipérbola
$[(e^t + e^{-t}) / 2]^2 - [(e^t - e^{-t}) / 2]^2 = 1 \Rightarrow [(e^{2t} + 2e^te^{-t} + e^{-2t}) / 4] - [(e^{2t} - 2e^te^{-t} + e^{-2t}) / 4] = 1$

Como $e^te^{-t} = e^{t-t} = e^0 = 1$, tenemos: $[(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) / 4] - [(e^{2t} - 2 + e^{-2t}) / 4] = 1$

Restamos ya que tienen el mismo denominador: $[(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})] / 4 = 1$

$(e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}) / 4 = 1 \Leftrightarrow (e^{2t} - 2 + e^{-2t} - e^{2t} - 2 - e^{-2t}) / 4 = 1 \Leftrightarrow 4 / 4 = 1$