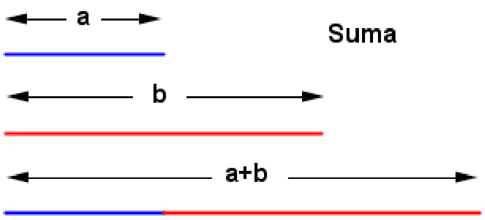
COMPRENDIENDO LA MATEMÁTICA DE EUCLIDES

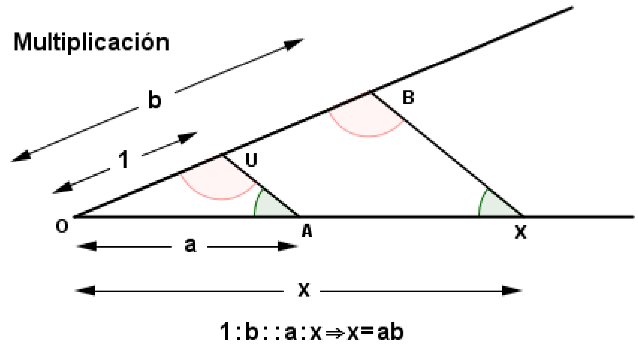
PARA EUCLIDES la 'magnitud' de un segmento de línea recta era su tamaño (o longitud)

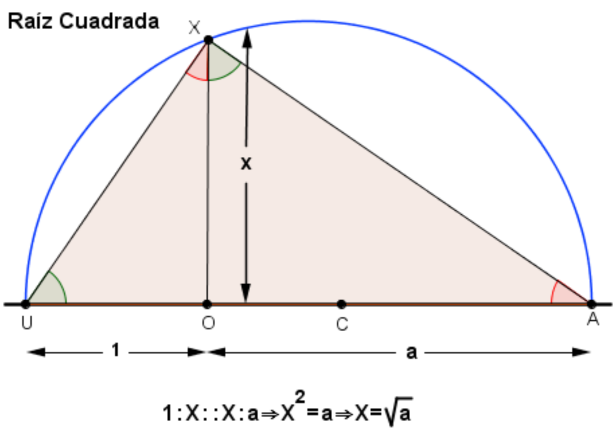
Posteriormente, la palabra **MAGNITUD** se extendió hasta abarcar a toda PROPIEDAD MEDIBLE. Porque la MATEMÁTICA se orientó pronto hacia el PROCESO DE LA MEDIDA, y el CÁLCULO. Pero Euclides no procede así. Ignora casi por completo el PROCESO DE LA MEDIDA de segmentos de línea recta, y su resultado natural: la aparición de los NÚMEROS REALES.

¿Y entonces en qué se centra Euclides? En el CÁLCULO CON SEGMENTOS DE LÍNEA RECTA. Enseña a sumarlos, a restarlos, a multiplicarlos, a hacer su raíz cuadrada… y a dividirlos en partes iguales. Todo ello utilizando sólo una regla SIN GRADUAR, y un compás que se cierra nada más ser usado.

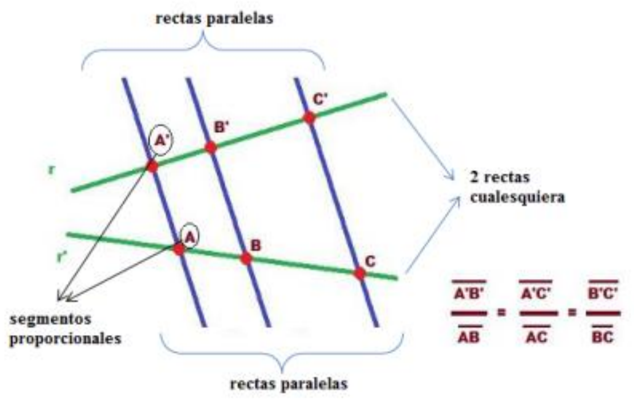
Por ejemplo, en presentación moderna:







Un CÁLCULO que requiere conocimientos básicos de GEOMETRÍA: **el Teorema de Tales.**



I. REINVENTANDO A EUCLIDES

Lo que nunca se hace en las clases de matemáticas es darte tiempo a reinventar por ti mism@ lo que ya está descubierto. Pero así te privan del placer de ejercitar tu don más preciado: LA CREATIVIDAD. Pongamos remedio a esto aquí, así:

Tienes un segmento de línea recta ¿?

¿cómo puedes dividirlo (con regla y compás) en dos partes exactamente iguales?

No pienses en medirlo y dividir la medida por dos, esto nunca sería exacto. ¿Por qué? Además, tú crees firmemente que esta división se puede realizar de manera EXACTA. Al menos en tu UNIVERSO MENTAL: el UNIVEERSO DE LAS MATEMÁTICAS. Por eso quieres intentarlo.

No te desanimes, no eres tont@. Esta tarea no es modo alguno sencilla. Tampoco caigas en la trampa de implementarlo manualmente: tomando un hilo de la misma longitud y doblándolo por la mitad. Todo eso está muy bien, ¡y es muy ingenioso! Es más, es lo que todo el mundo (albañiles, carpinteros, toneleros…) hace. Lo que quiero que entiendas es que un matemático se plantea otro reto: entender de qué están hechos los pensamientos humanos. Porque el segmento que tienes arriba es un PENSAMIENTO tuyo. ¡Y nada más!

Que sí, que lo que tienes arriba no es un segmento de línea recta, porque tiene color, grosor y unos bordes difuminados. Un segmento de línea recta sería, siempre, invisible, intangible… Pero ¿será indivisible? Para responder esta pregunta, preguntémonos antes de qué está hecho. Y tal como nosotr@s nos lo imaginamos, está hecho de PUNTOS: otro inescrutable que se nos escapa.

Pues bien, nos imaginamos que existe un punto (que es ÚNICO) en el segmento que equidista ¿? de los dos puntos que constituyen sus EXTREMOS. ¿Existe realmente este punto? Tiene que existir, porque si no existiera tendríamos un problema serio: el segmento tendría un 'hueco'. Como no queremos eso, hacemos un POSTULADO: ese punto medio EXISTE.

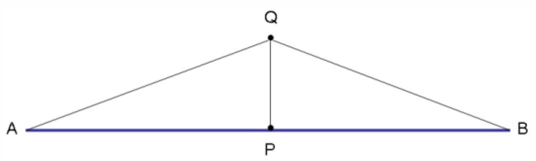
Y su existencia se basa en una **DEFINICIÓN**: es el (único) punto del segmento que equidista de sus dos puntos extremos. Y no sabemos nada más que esto que le da existencia; y esto es todo lo que tenemos para resolver nuestro problema: ENCONTRARLE.

II. EL MÉTODO MATEMÁTICO

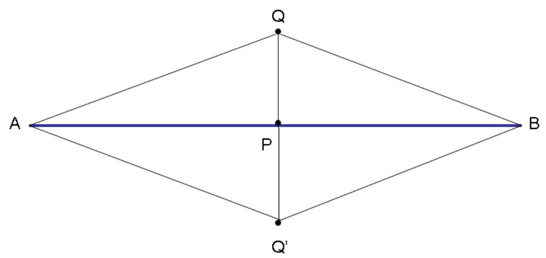
Leerás que la matemática es deductiva: parte de unas hipótesis (los **POSTULADOS**), a los que aplica unas reglas lógicas (los **AXIOMAS**), para alcanzar ciertas certezas (los **TEOREMAS**), de los que deduce otras certezas (los **COROLARIOS**) Bien, esta es la historia vista desde el futuro; el camino visto desde la meta. Pero no es para nada la historia tal y como sucedió. Y como no se te cuenta la historia real, llena de tentativas, de fracasos, de rodeos, de vueltas a empezar… terminas por no tener un conocimiento claro de cómo funciona tu MENTE. ¡Y lo que es peor, la confundes con la MEMORIA! Que es el RECUERDO SELECTIVO de lo que te imaginas que ocurrió.

Tu MENTE no es deductiva, es CREATIVA: crea pensamientos y luego los expone al SENTIR de la CONSCIENCIA para ver cuáles son verdad y cuáles no. Además, tu mente humana es JUGUETONA: fabrica juguetes (mentales) y juega con ellos hasta que se cansa. El juego, no el ganar, es su diversión; el camino, no la meta, es su pasión. Y resulta que de este juego, APRENDE. Es decir, con este juego EVOLUCIONA (cambia): los juegos cada vez son más divertidos. ¡Y más complejos! Porque la MENTE, no necesita dinero, ni comer, ni beber… ni trabajar. ¡Sólo EXPANDIRSE!

JUGUEMOS, pues. **Vete de atrás hacia delante**: imagina el problema resuelto (sabes dónde está P) y mira a ver qué sucede. ¿Qué conforman los infinitos puntos del plano que EQUIDISTAN de los dos extremos de un segmento de línea recta? Empieza de uno en uno, empieza por Q

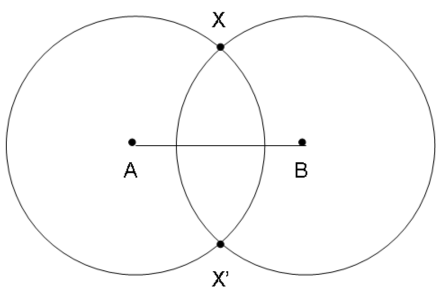


Q equidista de **A** y de **B**, sí y sólo sí los dos triángulos AQP y BQP son IGUALES. Es decir, el triángulo AQP es ISÓSCELES. Porque esta es precisamente la DEFINICIÓN de triángulo isósceles. Pero enseguida te das cuenta de que si Q equidista de **A** y de **B**, su simétrico respecto a la recta AB, Q', también cumple la misma PROPIEDAD. Así:



Ya lo empezamos a tener claro: todos estos puntos están ALINEADOS, conforman una línea recta que tenemos que bautizar: **MEDIATRIZ**. Luego la SOLUCIÓN a nuestro problema ya toma forma: el punto medio de un segmento es el punto en que dicho segmento corta a su mediatriz. Ahora sólo tenemos que descubrir cómo trazar (con regla y compas) la mediatriz de un segmento.

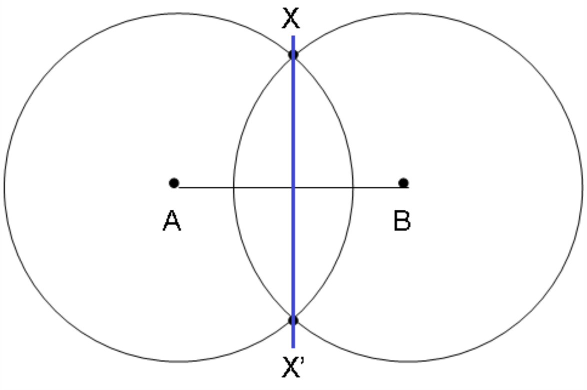
Pero recordamos, o sabemos, o intuimos, que una línea recta queda perfectamente determinada conociendo dos de sus puntos. Y los puntos X y X' que buscamos son los puntos de intersección de dos circunferencias IGUALES centradas en A y B de radio mayor que AB/2. Así:



III. HONESTIDAD

No sé cómo llega a una mente la IDEA FELIZ. No sé qué ingredientes hay que mezclar ni la proporción adecuada. Aunque sí reconozco alguno de esos ingredientes: fe (tú quieres), coraje (tú puedes), humildad (no sabes) y disciplina (estás abierto a la llegada de esa idea feliz) Y llega, puede que tarde un poco, pero llega. Y cuando llega, la RECONOCES: ¡es ésta!

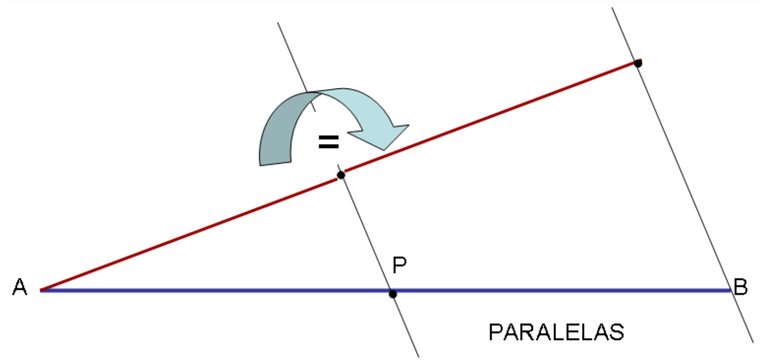
Ésta es



XX' es la **MEDIATRIZ** del segmento AB. ¡Problema resuelto!

IV. LA SOLUCIÓN NUNCA ES ÚNICA

Como sabes sumar (con regla y compás) segmentos de línea recta, y como recuerdas el Teorema de Tales, quizá la IDEA FELIZ sea esta otra:

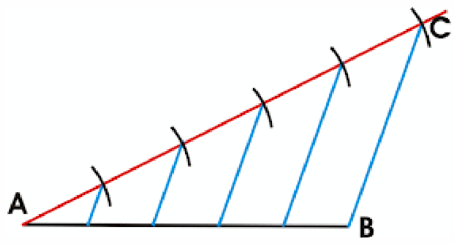


Aquí lo interesante es que te preguntes dónde he utilizado el compás (de Euclides), y cómo; y dónde he utilizado la regla, y cómo. No te será nada, pero que nada sencillo descubrirlo.

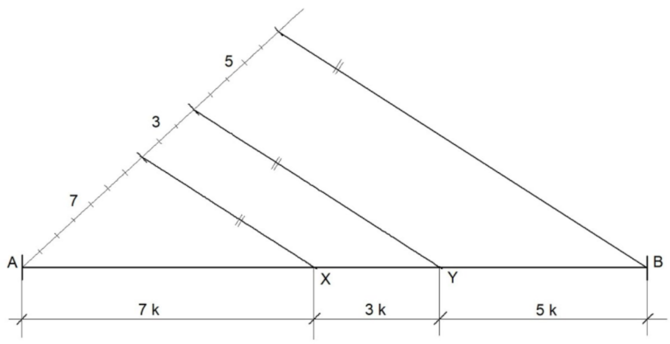
V. GENERALIZACIÓN

Hay que reconocerlo, las IDEAS FELICES, son pocas. Pero dan muchos frutos que son gérmenes de nuevas IDEAS FELICES. Ahora ya sabes cómo dividir (con regla y compás) un segmento de línea recta en dos partes iguales. ¿Podrás dividirlo en cinco partes iguales? ¡Verdad que sí!

Sí, así:



¿Y en tres partes PROPORCIONALES a 3, 5 y 7? Claro que sí:



VI. ACEPTANDO NUEVOS RETOS

Tienes un segmento de línea recta ¿? (sigues sin saber lo que es una línea recta)

¿cómo puedes dividirlo (con regla y compás) en MEDIA y EXTREMA RAZÓN?

¡Ya ves! La matemática griega utilizaba una jerga muy diferente de la nuestra. Para poder proseguir hay que dedicarle un tiempo largo a entender su lenguaje matemático. Para Euclides la **RAZÓN** de dos magnitudes homogéneas **A** y **B** era el cociente de esas dos CANTIDADES. Así:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

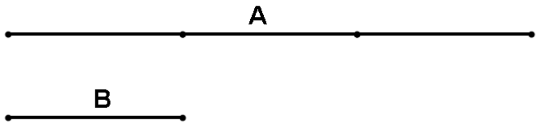
Con ello estaba expresando, sin saberlo, nuestro actual concepto de NÚMERO REAL. Pues lo que significaba para él $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ es el NÚMERO de veces que **B** está contenido en **A.**

Para entender bien las cosas siempre hay que ejemplificar. Sean

las LONGITUDES (que son magnitudes homogéneas) de dos segmentos de línea recta. Pues bien, $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ es el NÚMERO de veces que la longitud de **B** entra en la longitud de **A**. Una vez concretado esto, y siempre es importante concretar bien de qué estamos hablando, vemos con claridad que pueden suceder estas dos cosas:

1ª

Que **B** entre n veces exactas en **A**. Así

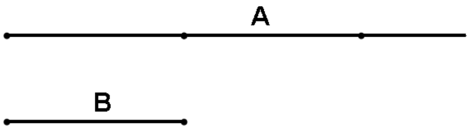


En lenguaje simbólico: $\frac{A}{B} = n$ ➔ **A = n B** (**A** es un **MÚLTIPLO** de **B**)

En nuestro caso, $\frac{A}{B} = 3$ ➔ **A = 3 B** (**A** es el triple de **B**)

2ª

Que **B** no entre un número n de veces exactas en **A**. Así:

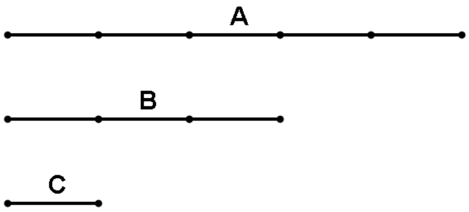


Es decir, $\frac{A}{B} \neq \mathbf{n}$ ➔ **A ≠ n B** (**A** no es múltiplo de **B**)

En este segundo caso, aún pueden suceder otras dos cosas:

2.1

Que exista un segmento **C** que entre **m** veces exactas en **A** y **n** veces exactas en **B**. Así:



En lenguaje simbólico: $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{C}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ ➔ **A** = m ($\frac{\mathbf{B}}{\mathrm{n}}$)

A es m veces $\frac{\mathbf{B}}{\mathrm{n}}$, donde $\frac{\mathbf{B}}{\mathrm{n}}$ es el segmento que se obtiene al dividir B en n **partes iguales**, cosa que ya hemos aprendido a hacer.

2.2

¿Qué pasa si no existe **C**? ¿Es esto posible?

Como siempre, la segunda pregunta es prioritaria. Porque si demostramos que existen casos en los que **A** y **B** no tienen PARTE ALÍCUOTA (**C**) sólo nos queda **ACEPTARLO** (aunque nos cueste, como sucedió con los pitagóricos)

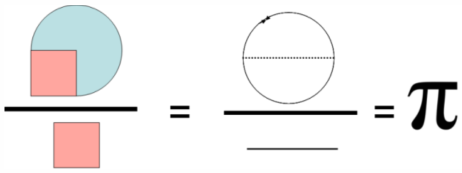
En **RESUMEN**: $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$**,** el NÚMERO de veces que **B** está contenido en **A,** puede ser:

- Un **NUMERO NATURAL** (los números para CONTAR, ORDENAR y CODIFICAR)
- Un **NUMERO FRACCIONARIO** (un cociente de números naturales)
- Un **NÚMERO IRRACIONAL** (como $\sqrt{2}$)

A la IGUALDAD de dos razones, Euclides la llama **PROPORCIÓN**

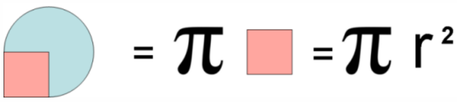
$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$$

Y la lee así: "**A** es a **B**, como **C** es a **D**". Es decir, el NÚMERO de veces que **B** entra en **A** es el mismo NÚMERO de veces que **D** entra en **C**. Y ese NÚMERO de veces es la CONSTATE DE PROPORCIONALIDAD. Además, nos da muchos ejemplos de PROPORCIONES, ésta te sorprenderá:



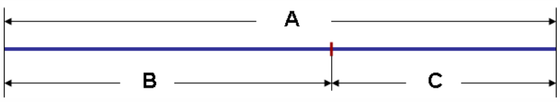
Donde π es la CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD. Pero dedica tiempo a entender bien este **IDEOGRAMA**, porque en la figura de arriba tienes implícito que la LONGITUD de una circunferencia es π veces la longitud de su DIÁMETRO:

Y también tienes implícito que el AREA de un círculo es π veces el área del cuadrado cuyo lado es igual al radio del círculo:



Ya ves, **A** y **B**, y **C** y **D**, no tienen que ser magnitudes de la misma especie (homogéneas) Y en el caso de que las cuatro sean LONGITUDES, Euclides nos enseña a calcular en $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$**,** **D**: la CUARTA PROPORCIONAL. Y si B = C, es decir, $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}$**,** nos enseña a calcular **B**: la MEDIA PROPORCIONAL.

Entendido lo anterior, para Euclides dividir un segmento **A** de línea recta



en MEDIA (**B**) y EXTREMA RAZÓN (**C**), es dividirlo así: lo pequeño (**C**) tiene que ser a lo grande (**B**), como lo grande (**B**) es al todo (**A**). Es decir:

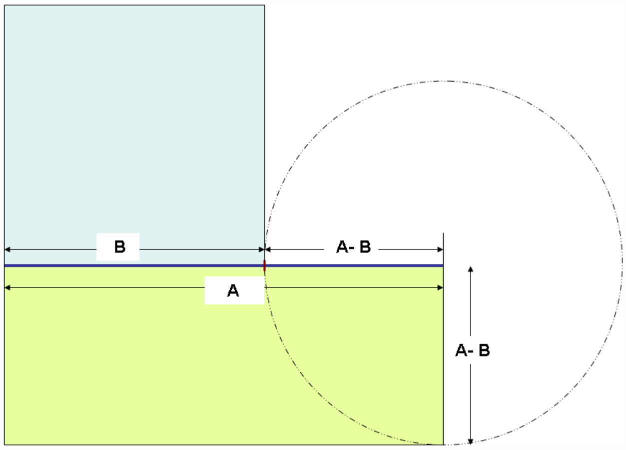
$$\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$$

Reclama siempre ENTENDERLO TODO. ¿Por qué eso de MEDIA y EXTREMA RAZÓN? Porque en la PROPORCIÓN **[C, B, B, A]**, **B** está en el MEDIO, y **C** en un EXTREMO.

No te confundas, lo que te dan es **A,** y tú tienes que calcular **B**, porque **C = A – B.** Así que**:**

$$\mathbf{\frac{C}{B} = \frac{B}{A} \quad \rightarrow \quad \frac{A-B}{B} = \frac{B}{A} \quad \rightarrow \quad (A-B)\cdot A = B\cdot B}$$

Lo que para Euclides significaba que el ÁREA del rectángulo de dimensiones **A-B** y **A**, es igual que el ÁREA del cuadrado de lado **B.** Es decir, en esta figura de la sección buscada

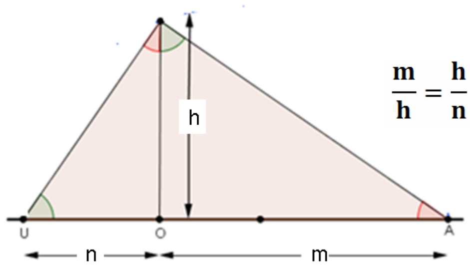


las áreas verde y azul son IGUALES. Pero ¿cómo se consigue esto? Amig@ mí@, ahora sí que estás metid@ de lleno en el pellejo de Euclides, ¿a ver cómo sales de ésta? Necesitas la IDEA FELIZ. Y esta vez te viene de que tú sabes **CUADRAR RECTÁNGULOS**.

¿Qué no? Para empezar te tengo que aclarar que ‘cuadrar un rectángulo’ es, dado el rectángulo, construir con regla y compás un cuadrado con el mismo área. Es decir, si las dimensiones del rectángulo son **A** y **B**, hay que encontrar un **C** tal que

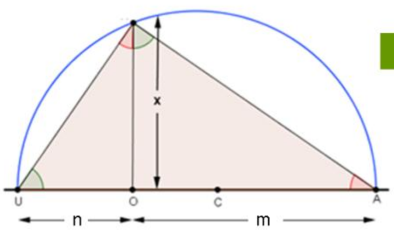
$$\mathbf{A\cdot B = C\cdot C \quad \rightarrow \quad \frac{A}{C} = \frac{C}{B}}$$

Lo que quiere decir que hay que calcular la MEDIA PROPORCIONAL entre A y B. Pero Euclides sabe que en un **TRIÁNGULO RECTÁGULO**, la altura es MEDIA PROPORCIONAL entre las proyecciones de sus cateos. Así:



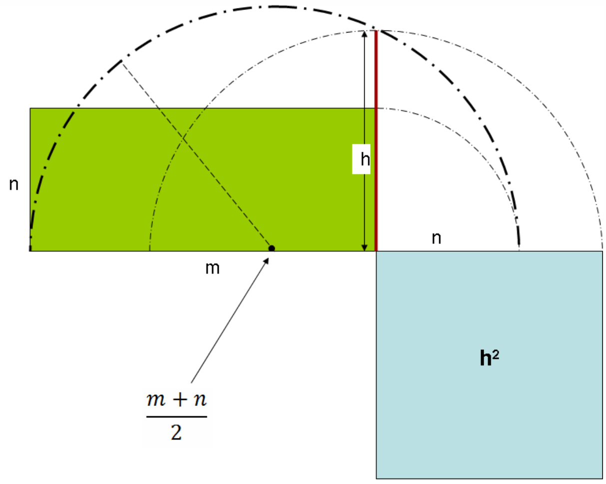
$$\mathbf{\frac{m}{h} = \frac{h}{n}}$$

Y sabía, dados m y n, construir (por el segundo teorema de Tales) un triángulo rectángulo que tuviese a m y n como proyecciones de los catetos. Luego la MEDIA PROPORCIONAL que buscaba, x, era la atura de este triángulo rectángulo. Así:



$m \cdot n = x^2$

Luego sabía CUADRAR RECTÁNGUNLOS. Si tú le dabas para ‘cuadrar’ un rectángulo de dimensiones m y n (el de color verde), él procedía así:



Y obtenía el cuadrado (azul) que tenía exactamente el mismo área que el rectángulo (verde) que tú le habías dado. ¿Puedes explicar esta figura? Parecería que para resolver nuestro problema sólo hay de deshacer el camino, pero ¿cómo? Te confieso humildemente que no lo sé, no sé cómo Euclides dio con la solución. Sólo sé que la encontró, aunque, siguiendo su nefasta costumbre, nunca explica cómo. Yo también la sé encontrar, pero necesito el ÁGEBRA, ya que lo que yo sé es proceder simbólicamente como si **A** y **B** fuesen números reales (**B** desconocido) Así

$$\mathbf{\frac{A-B}{B}=\frac{B}{A}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A^2-BA-B^2=0}$$

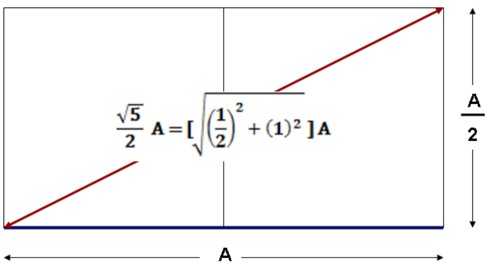
ECUACIÓN en la sé despejar **B** si conozco **A**. Se trata de una ecuación de segundo grado en **B**

$$\mathbf{aB^2+bB+c=0}$$

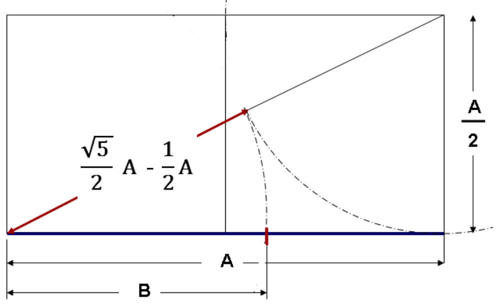
Donde a = -1, b = -A y c = A^2. Aplicando la fórmula pertinente y simplificando un poco me sale:

$$\mathbf{B = \frac{\sqrt{5}}{2}\,A - \frac{1}{2}A}$$

Además, sé traducir la anterior expresión algebraica a movimientos con regla y compás.



- Ya que $\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathbf{A} = [\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2}\,]\,\mathbf{A}$, y por el Teorema de Pitágoras, $\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathbf{A}$ es este segmento



- Y, por tanto, ésta es la SECCIÓN de un segmento **A** en MEDIA y EXTREMA razón. Lo que Kepler llamó SECCIÓN ÁUREA.

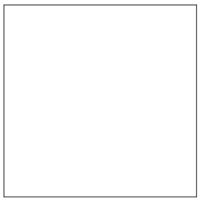
La FIGURA se explica por sí misma.

VII. PROGRESO = APERTURA DE MIRAS

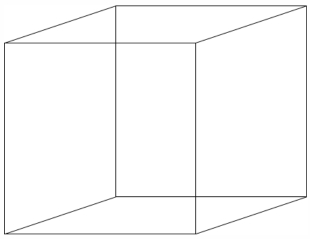
Llegados hasta aquí, quizá te preguntes por qué Euclides no desarrolló un ÁLGEBRA formal como la nuestra. Y la respuesta es: porque la MATEMÁTICA GRIEGA se atascó en esto:

- Sí **a** es la **LONGITUD** de un segmento de línea recta

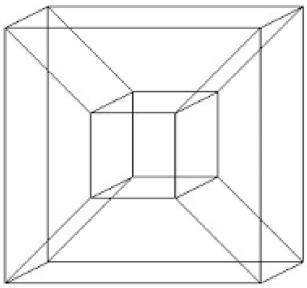
- ¿Entonces, qué sentido tiene $\mathbf{a \cdot a = a^2}$? Y el único sentido que los griegos le encontraron es que $\mathbf{a^2}$ es el **ÁREA** de un cuadrado que tiene a ***a*** como lado



- Por lo mismo**,** $\mathbf{a^3}$ es el VOLUMEN de un cubo que tiene a ***a*** como arista



- Y $\mathbf{a^4}$ es el HIPERVOLUMEN de un teseracto que tiene $\mathbf{a^3}$ como cara



- ----------------------

Por esto, para la matemática griega cosas como éstas no tenían sentido:

$$\mathbf{a + a^2 = b, \quad 8\,a^2\,b = a^4}$$

Porque jamás se hubieran atrevido, fijándonos por ejemplo en la primera ecuación, a sumar una longitud a un área esperando obtener una longitud. Así que nunca desarrollaron un ÁLGEBRA FORMAL. El álgebra formal prosperó cuando dejaron de asociarse imágenes concretas (longitudes, áreas, volúmenes…) a los PRODUCTOS de las cantidades desconocidas. Ahora, $\mathbf{a, a^2, b, 8a^3}$ y $\mathbf{a^4}$ son sólo EXPRESIONES ALGEBRAICAS que adquieren siempre VALOR NÚMERICO cuando las variables toman unos valores concretos en el campo de los números reales.

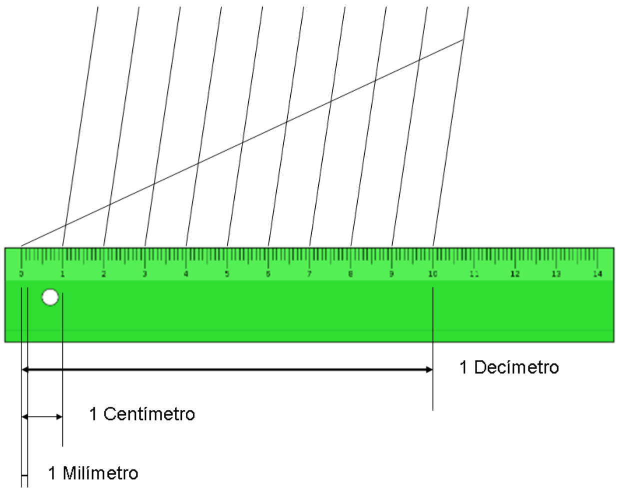
VIII. APLICACIÓN PRÁCTICA

El **CONOCIMIENTO** nunca es superfluo, siempre produce frutos: nutritivos, sabrosos, refrescantes, y patentables. Ahora estás en disposición de fabricar (y ganar pasta vendiéndola) una **REGLA GRADUADA**. Lo haremos por pasos:

PRIMERO: Elige la UNIDAD de medida de LONGITUDES (la nuestra será el METRO)

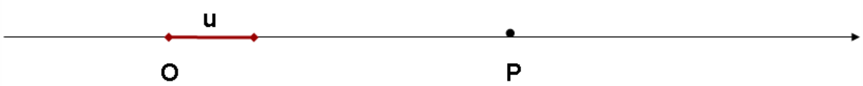
SEGUNDO: Elige una BASE (decimal, sexagesimal…) para la obtención de MÚLTIPLOS y SUBMÚLTPLOS. N**uestra base será DECIMAL** (como nuestro sistema de numeración)

TERCERO: Implementa lo aprendido con anterioridad para obtener (físicamente) a partir de la UNIDAD sus SUBMÚLTIPLOS. Así:



¡Ya tienes tu REGLA GRADUADA! Ahora puedes hacer copias y venderlas. Te las quietarán de las manos, pues un asunto práctico como dividir una varilla metálica por la mitad no se resuelve con regla y compás. Se resuelve midiéndola, dividiendo el VALOR DE LA MEDIDA por dos, y marcando con la regla en la varilla el valor que te haya salido en la división. Todo este proceso, como es práctico, esa sujeto a unos errores que tú tienes que aprender a minimizar mediante el esmero y el cuidado, la precisión de los aparatos de medida y el cariño que le pones a todo lo que haces.

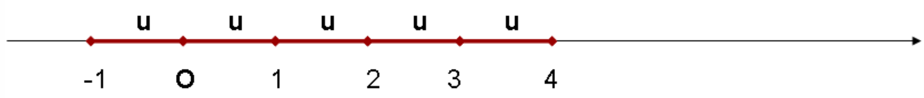
Nunca olvides que la EXACTITUD sólo existe en la mente matemática. Una mente que infiere que estas divisiones en partes iguales que se pueden hacer en un segmento de línea recta no tienen límite, y por tanto los puntos de una recta se 'aprietan' tanto que no dejan huecos. Bien, así sea. Tomemos una de esas rectas que sólo existen en la imaginación matemática. Fijemos en ella un origen (O) y una unidad de medida (**u**)



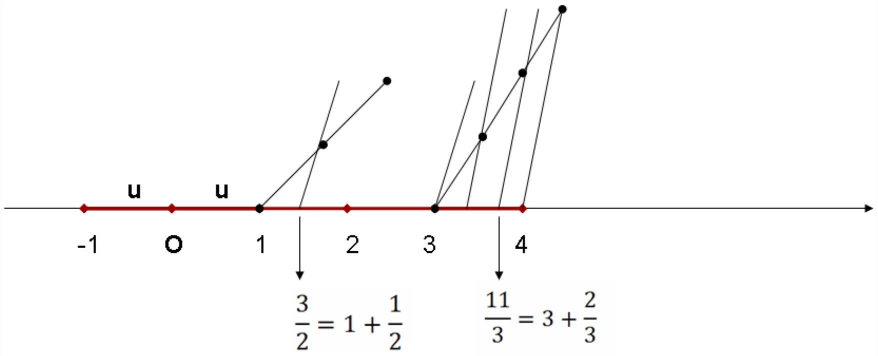
Ahora es fácil IMAGINAR que a cada punto **P** de la recta le corresponde un NÚMERO: el VALOR DE LA MEDIDA del segmento **OP** medido en unidades **u**. Ya lo sabes, Euclides hubiese escrito este NÚMERO así:

$$\frac{\overline{\mathbf{OP}}}{\mathbf{u}}$$

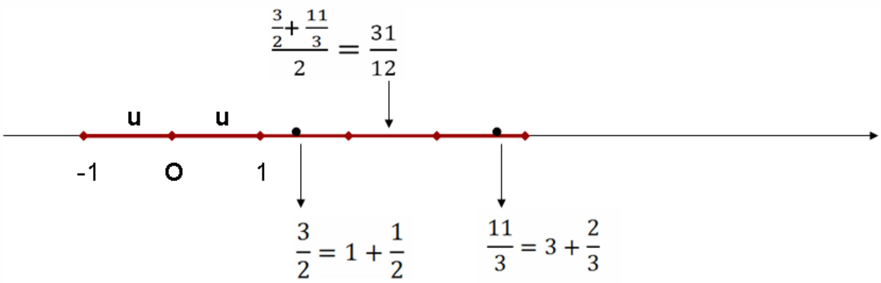
También sabes que $\frac{\overline{\mathbf{OP}}}{\mathbf{u}}$, la **ABCISA** del punto P, puede ser un **NÚMERO ENTERO** (positivo hacia la derecha del ORIGEN, negativo hacia la izquierda) siempre que **OP** sea un MÚLTIPLO de **u**. Así:



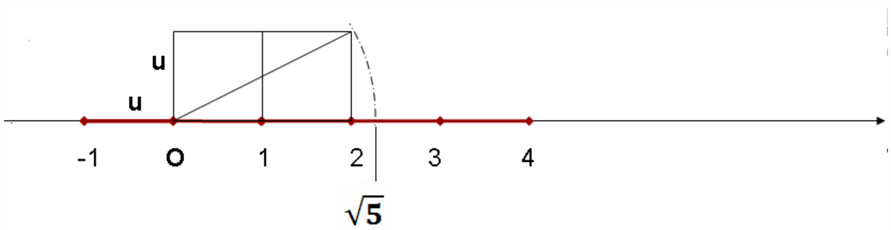
O puede ser un **NÚMERO RACIONAL**. Así:



Números que son DENSOS en la RECTA REAL: entre dos números racionales cualesquiera siempre hay infinitos. Por ejemplo, entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{11}{3}$ está su PUNTO MEDIO, que también es RACIONAL, $\frac{31}{12}$ Así:



Y así hasta el infinito. Y pese a todo dejan huecos, porque tenemos que hay puntos



como $\sqrt{5}$ que no son RACCIONALES: no se pueden igualar a ninguna fracción. En efecto, si

$$\sqrt{5}=\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{q}^2}=5$$

Pero esto último es IMPOSIBLE. Porque si un NÚMERO CUADRADO PERFECTO fuera divisible entre otro NÚMERO CUADRADO PERFECTO, el cociente sería siempre otro NÚMERO CUADRADO PERFECTO. Y 5 no es un NÚMERO CUADRADO PERFECTO, es primo.

Son los llamados **NÚMEROS IRRACIONALES.** Con éstos ya se completa la RECTA REAL, ya no hay huecos. Y encontrar la abscisa P del punto medio de un segmento de línea recta de extremos A y B es tan sencillo como calcular la SEMISUMA ¿? de las abscisas de A y B.