RAZÓN, PROPORCIÓN Y NÚMERO - ESO

Tres CONCEPTOS que se entienden mal por mucho que se expliquen. Esto se debe a que pertenecen a una edad de las matemáticas donde las cosas se hacían de una manera distinta a la actual: con más ingenio y menos álgebra.

RAZÓN

La DEFINICIÓN

Dadas dos CANTIDADES, **A** y **B**, de la misma MAGNITUD, llamamos RAZÓN

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

al NÚMERO de veces que A contiene a B. Se trata, pues, de una comparación por cociente.

Los ejemplos:

- Gloria tiene 14 años y su hermano Miguel 7. La RAZÓN de sus edades es

$$\frac{Edad\ de\ Gloria}{Edad\ de\ Miguel} \equiv \frac{14}{7} = 2$$

Eso significa que Gloria tiene el doble de años que su hermano. ¿Cuándo la razón de sus edades será $\frac{3}{2}$? Sea x el número de años que tienen que trascurrir para que suceda esto. Entonces:

$$\frac{14+x}{7+x} = \frac{3}{2} \quad \leftrightarrow \quad 2(14+x) = 3(7+x) \quad \leftrightarrow \quad x = 7$$

Esto ocurrirá cuando Gloria tenga 21 años y Miguel 14.

- Dados estos dos segmentos de línea recta, ¿cuál es la razón entre sus longitudes?

Evidentemente:

$$\frac{\mathrm{A}}{3} = \frac{\mathrm{B}}{2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{3}{2}$$

Pero ¿qué significa eso? Varias cosas:

- $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} \quad \leftrightarrow \quad 2\mathrm{A} = 3B$ El doble de A es igual al triple de B
- $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{A} = 3[\frac{\mathrm{B}}{2}]$ A es tres veces la mitad de B
- $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 1 + \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{A} = \mathrm{B} + \frac{\mathrm{B}}{2}$ A es igual a B más la mitad de B

- Irene ha comido los $\frac{8}{12}$ de la pizza, y Marta los $\frac{4}{12}$ restantes. ¿Cuál es la razón entre las cantidades que han comido cada una?

$$\frac{Cantidad\ que\ ha\ comido\ Irene}{Cantidad\ que\ ha\ comido\ Marta} = \frac{\frac{8}{12}}{\frac{4}{12}} = 2$$

Irene ha comido el doble.

Al día siguiente Marta pide una pizza para ella sola y se come $\frac{3}{5}$ de su tarta, mientras que Irene se come $\frac{4}{7}$ de la suya. ¿Quién ha comido más? Para responder esta pregunta comparemos la cantidad que ha comido Marta con la que ha comido Irene:

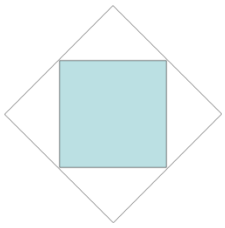
$$\frac{Cantidad\ que\ ha\ comido\ Marta}{Cantidad\ que\ ha\ comido\ Irene} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{21}{20}$$

¿Qué significa eso? ¡Qué Marta ha comido un poco más! ¿Cuánto más? Puesto que

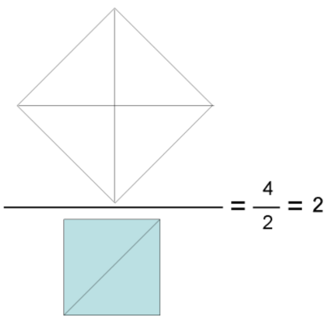
$$\frac{21}{20} = 1 + \frac{1}{20}$$

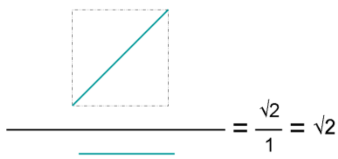
Ha comido un veinteavo más de tarta.

- Tomemos estos dos cuadrados

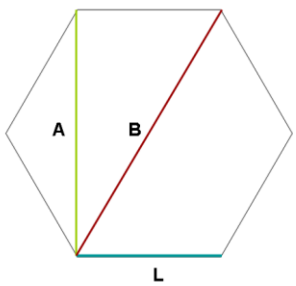


¿Cuál es la razón entre sus áreas? ¿Y ente sus lados?





- En un hexágono de lado L tenemos dos diagonales A y B. Calcula $\frac{A}{L}$ y $\frac{B}{L}$



PROPORCIÓN

La DEFINICIÓN

Decimos que dos RAZONES $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ y $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$ están en PROPORCIÓN, si:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$$

Y entonces se lee: 'A es a B, como C es a D' Es decir, el NÚMERO de veces que entra B en A es el mismo NÚMERO de veces que C entra en D.

Y a este NÚMERO se le llama CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD de la proporción.

- Una **PROPORCIÓN** tiene cuatro términos [A, B, C, D]   Y se dice que A y D son los EXTREMOS, y B y C los MEDIOS.
- Si B = C, la PROPORCIÓN [A, B, D] sólo tiene tres términos, y B es la **MEDIA PROPORCIONAL**. Eso significa que A, B y D están en PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.
- Si A = B+D, la PROPORCIÓN [B+D, B, D] es DIVINA, y su CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD es $\boldsymbol{\phi}$: **el NÚMERO DE ORO**.

Los ejemplos:

- $[2, 3, 4, 6]$ forman PROPORCIÓN. En efecto

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

¿Qué significa eso? Que el NÚMERO de veces que 4 entra en 6: $\frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$ (una vez y media); es el mismo NÚMERO de veces que 2 entra en 3: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ (una vez y media) Y también significa que

$$6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$$

(producto de medios es igual a producto de extremos)

- $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, 3, 4] forman PROPORCIÓN. En efecto

$$\frac{4}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$$

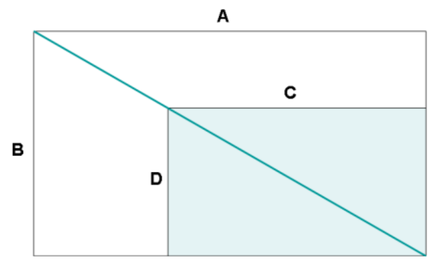
¿Qué significa eso? Que las veces que $\frac{1}{2}$ entra en $\frac{2}{3}$ $(una\ y\ un\ tercio: 1 + \frac{1}{3})$ son las mismas veces que 4 entra en 3$(una\ y\ un\ tercio: 1 + \frac{1}{3})$ Y también significa que:

$$4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3}$$

(4 veces $\frac{1}{2}$ = 3 veces $\frac{2}{3}$)

Ya ves para lo que sirve el cálculo con FRACCIONES.

- En esta figura



[A, B, C, D] forman PROPORCIÓN. ¿Puedes demostrarlo? Si ahora definimos el módulo del rectángulo (A, B) como

$$Mód\ (A, B) = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

El rectángulo blanco y el azul tienen el mismo MÓDULO:

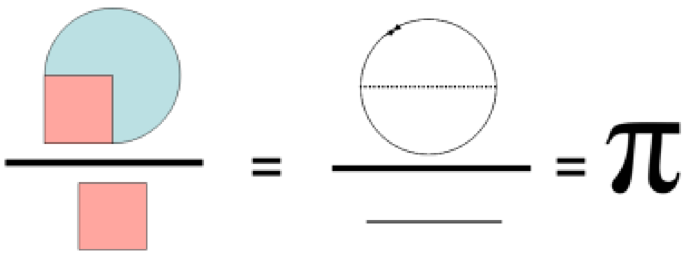
$$Mód\ (A, B) = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = Mód\ (C, D)$$

Es decir, tienen la misma FORMA: lados proporcionales y ángulos iguales. Por lo que la CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD de esta proporción define una FORMA RECTÁNGULAR.

- ¿Cuál es el módulo de un rectángulo tal que si se le divide en dos partes iguales por su lado más largo se obtiene otro más pequeño, pero semejante?

- ¿Cuál es el módulo de un rectángulo tal que si se le quita un cuadrado de lado igual al lado más corto, se obtiene otro más pequeño, pero semejante?

- En esta figura



[Área del círculo, Área del cuadrado de lado r, Longitud de la circunferencia, Diámetro (2r)] forman PROPORCIÓN. ¿Puedes demostrarlo? Y la CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD es el número π.

- Sí **[A, B, C, D]** forman PROPORCIÓN, entonces **[A, B, A+C, B+D]** forman PROPORCIÓN. ¿Puedes demostrarlo? Es decir, puedes demostrar que

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A + C}{B + D} = \frac{A - C}{B - D} = \frac{A + 2C}{B + 2D} = \cdots$$

Luego si **[B+C, B, C]** forman PROPORCIÓN CONTÍNUA, entonces **[B+C, B, C, B-C]** forman PROPORCIÓN con la misma CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD, y

⊢ **B+C, B, C, B-C, 2C-B, 2B-3C, 3B-5C, 5B-8C**… son términos de una progresión geométrica

NÚMERO

La DEFINICIÓN

Dada una RAZÓN $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, las infinitas RAZONES $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}, \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{F}} \cdots \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{S}}$ tales que:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{F}} = \cdots = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{S}} = \langle \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{1}} \rangle$$

conforman la PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right]$, donde X es la CONSTANTE de la proporcionalidad.

Dada una RAZÓN $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, llamamos **NÚMERO** a la CONSTANTE **X** de la PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right]$.

Tenemos que **X** es el VALOR DE LA MEDIDA de **A** en unidades **B**. Así:

$$\underbrace{A}_{Cantidad} = \underbrace{X}_{Valor\ de\ la\ medida} \cdot \underbrace{veces\ \ B}_{Unidad\ de\ medida}$$

Los ejemplos:

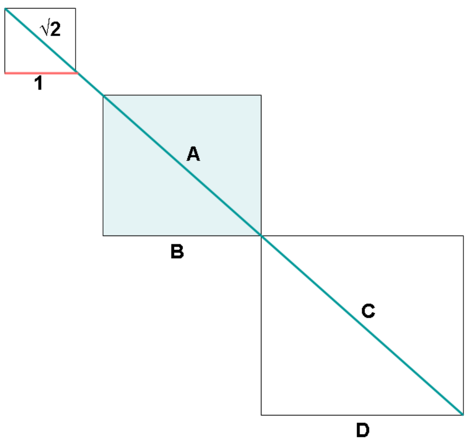
- La FRACCIONES $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \cdots = \frac{3n}{n}$ conforman la PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{3}{1}\right]$

Y la CONSTANTE DE LA PROPORCIONALIDAD $\langle \frac{3}{1} \rangle$ $(mcd(3,1) = 1)$
define el NÚMERO 3 (que es un NÚMERO RACIONAL ENTERO)
Y decimos que los NUMERADORES son el triple de grades que los DENOMINADORES

- La FRACCIONES $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{n}{2n}$ conforman la PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{1}{2}\right]$

Y la CONSTANTE DE LA PROPORCIONALIDAD $\langle \frac{\frac{1}{2}}{1} \rangle$ $\left(mcd\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}\right)$
define el NÚMERO $\frac{1}{2}$ (que es un NÚMERO RACIONAL FRACCIONARIO)
Y decimos que los NUMERADORES son la mitad de grades que los DENOMINADORES

- En esta figura de la derecha **[A, B, C, D]** forman PROPORCIÓN. ¿Puedes demostrarlo? Por lo que la CONSTANTE DE LA PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{Diagonal\ del\ cuadrado}{Lado\ del\ cuadrado}\right]$

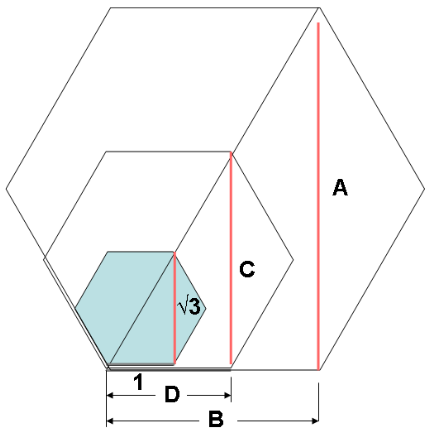


$$\frac{Diagonal\ del\ cuadrado}{Lado\ del\ cuadrado} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \cdots = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} \equiv \langle \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{1}} \rangle$$

define el NÚMERO $\sqrt{\mathbf{2}}$ (que es el NÚMERO de veces que el lado entra en la diagonal de su cuadrado)

Por el Teorema de Pitágoras: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ($\sqrt{\mathbf{2}}$ es el número que multiplicado por sí mismo da 2)
Se trata de un NÚMERO IRRACIONAL EUCLIDIANO: se puede construir con regla y compás.

- En esta figura de la derecha **[A, B, C, D]** forman PROPORCIÓN. ¿Puedes demostrarlo? Por lo que la CONSTANTE DE LA PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{Diagonal\ secundaria}{Lado\ del\ hexágono}\right]$

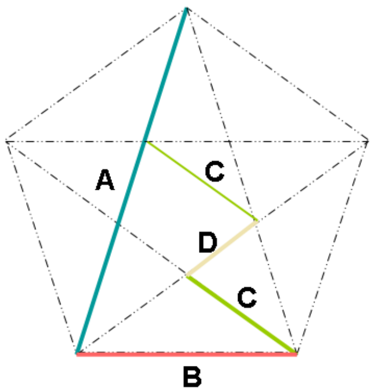


$$\frac{Diagonal\ secundaria}{Lado\ del\ hexágono} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \cdots = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} \equiv \langle\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{1}}\rangle$$

define el NÚMERO $\sqrt{\mathbf{3}}$ (el NÚMERO de veces que el lado entra en la diagonal secundaria de su hexágono)

Por el Teorema de Pitágoras: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ ($\sqrt{\mathbf{3}}$ es el número que multiplicado por sí mismo da 3)
Se trata de un NÚMERO ALGEBRAICO IRRACIONAL que se puede construir con regla y compás (EUCLIDIANO)

- En esta figura de la derecha **[A, B, C, D]** forman PROPORCIÓN. ¿Puedes demostrarlo? Por lo que la CONSTANTE DE LA PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{Diagonal\ del\ Pentágono}{Lado}\right]$

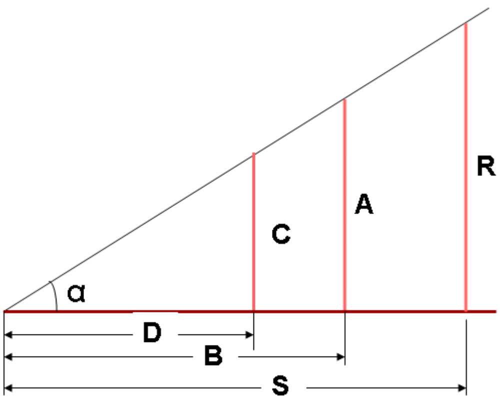


$$\frac{Diagonal\ del\ Pentágono}{Lado} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \cdots = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} \equiv \langle\frac{\phi}{\mathbf{1}}\rangle$$

define el NÚMERO DE ORO ϕ (el NÚMERO de veces que el lado entra en la diagonal de su pentágono regular)

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

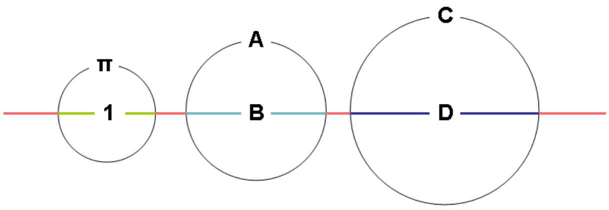
- En esta figura de la derecha **[A, B, C, D]** forman PROPORCIÓN. ¿Puedes demostrarlo? Por lo que la CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD de esta PROPORCIONALIDAD



$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \cdots = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{S}} \equiv \langle\frac{\boldsymbol{\tan\alpha}}{\mathbf{1}}\rangle$$

define el NÚMERO $\boldsymbol{\tan\alpha}$ (tangente de α)

- En esta figura de la derecha **[A, B, C, D]** forman PROPORCIÓN. Por lo que la CONSTANTE DE LA PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{Diámetro}\right]$



$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \cdots = \frac{Longitud\ de\ la\ circunferencia}{Diámetro} \equiv \langle\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{1}}\rangle$$

define el NÚMERO $\boldsymbol{\pi}$ (pi) (el número de veces que el DIÁMETRO entra en la LONGITUD DE SU CIRCUNFERENCIA) que es un NÚMERO TRASCENDENTE (por tanto IRRACIONAL)

EPÍLOGO

Los griegos clásicos no hacían una matemática como la nuestra (que está basada en el ÁLGEBRA) porque no tenían bien construido el concepto de NÚMERO (generalizado) Es verdad que se acercaron mucho a él con sus conceptos de RAZÓN y de PROPORCIÓN, pero les faltó culminar esta tarea con una buena representación de los NÚMEROS REALES (acompañada de su NOTACIÓN CORRESPONDIENTE y de buenos métodos de APROXIMACIÓN)

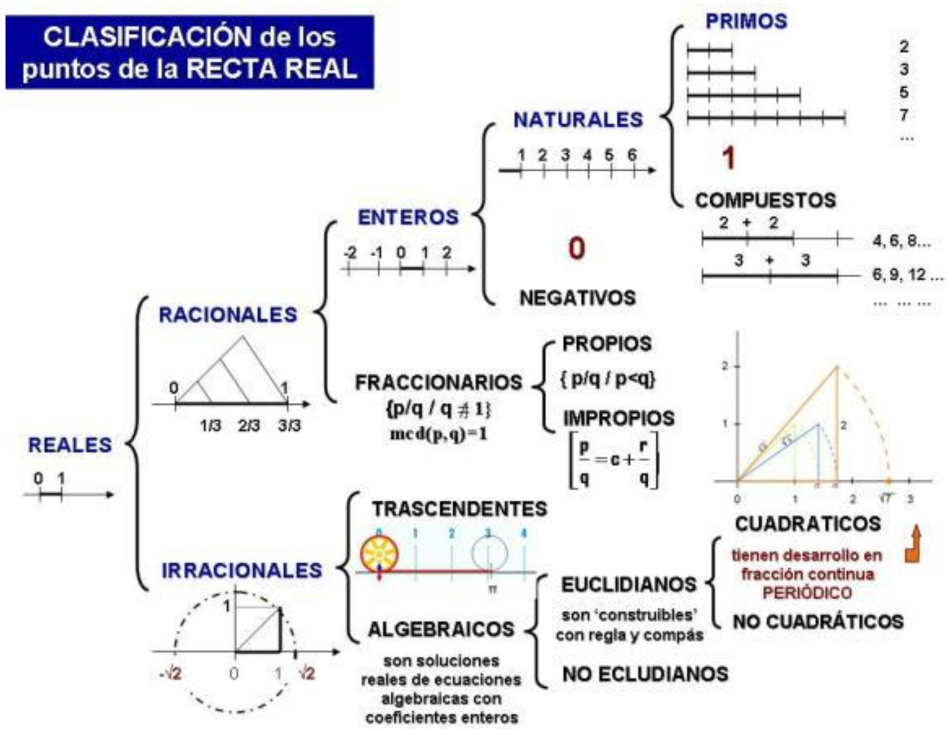
Lo que quiero que entiendas ahora es que si en una recta tomamos un ORIGEN (O) y una UNIDAD DE MEDIDA (**u**)

A cada punto P de la recta le CORRESPONDE un SEGMENTO DE LÍNEA RECTA OP. Y a cada segmento OP le corresponde la PROPORCIONALIDAD

$$\left[\frac{\mathbf{OP}}{\mathbf{u}}\right] = \langle \frac{x}{1} \rangle$$

Donde x, la CONSTANTE DE LA PROPORCIONALIDAD $\left[\frac{\mathbf{OP}}{\mathbf{u}}\right]$, es la MEDIDA del segmento OP en unidades **u**. Es decir, a cada punto P de la recta le corresponde un número x (positivo hacia la derecha, negativo hacia la izquierda) llamado ABSCISA del punto.

Lo anterior no sería más que una aplicación de lo visto antes en esta ACTIVIDAD si no ocurriese lo siguiente: que ahora tenemos una magnífica REPRESENTACIÓN de los NÚMEROS REALES.



Como todo **MAPA DEL TESORO**, esta CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES necesita que te la curres un montón, porque además de tener algunos fallos, está escrita en clave. La clave la irás desentrañando a medida que le dediques tiempo y prosigas tus estudios en matemáticas.